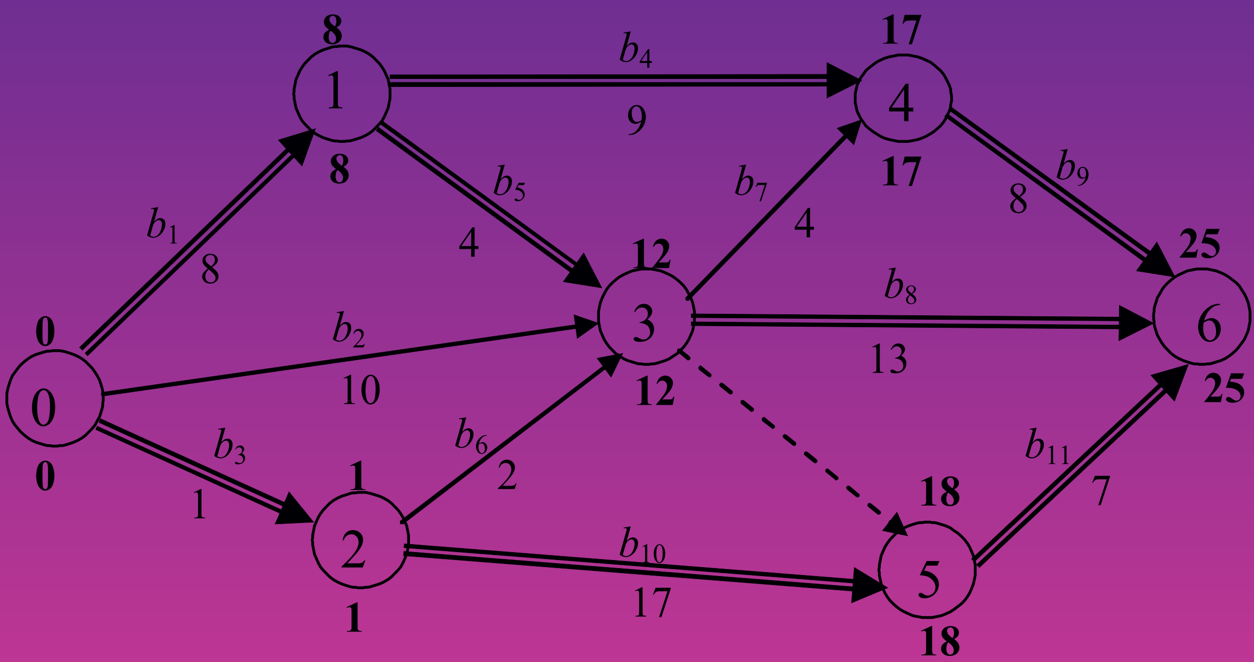
Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Уральский
энергетический
институт

М. А. ПЛЕСКУНОВ

ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

М. А. Плескунов

ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
*в качестве **учебного пособия** для студентов,*
обучающихся п специальностям 231300 – Прикладная математика,
08011 – Маркетинг, 080507 – Менеджмент организации

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 330.4:339.13(075.8)
ББК 65-32в631я73
П38

Рецензенты:

Г. А. Тимофеева, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей и прикладной математики Уральского государственного университета путей сообщения;
В. Е. Пак, канд. физ.-мат. наук, зам. директора ИММ УрО РАН

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Короткий

Плескунов, М. А.
П38 Задачи сетевого планирования : учебное пособие / М. А. Плескунов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 92 с.
ISBN 978-5-7996-1167-5

Пособие содержит методы решения основных задач теории сетевого планирования и управления, рассматриваются вопросы построения сетевого графика, отыскания критического пути, расчета резервов времени событий и работ. Даны методы отыскания вероятностных характеристик сетевого планирования для трехпараметрических и двухпараметрических моделей. Приведен алгоритм оптимизации стоимости проекта методом «время – стоимость» и нахождения плана выполнения работ с минимальной стоимостью за минимальное время. В пособие включены варианты индивидуальных заданий, охватывающие все разобранные виды задач.

Библиогр.: 7 назв. Табл. 81. Рис. 19.

УДК 330.4:339.13(075.8)
ББК 65-32в631я73

Учебное издание

Плескунов Михаил Александрович

Задачи сетевого планирования

Подписано в печать 2014. Формат 60×90 1/16. Бумага писчая.
Плоская печать. Усл. печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 2,6. Тираж 100 экз. Заказ № 1157.

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ISBN 978-5-7996-1167-5

ВВЕДЕНИЕ

Сетевое планирование и управление (СПУ) представляет собой систему методов, с помощью которых осуществляется планирование и управление разработкой и осуществлением крупных хозяйственных комплексов, научной и технологической подготовкой производства, строительством новых объектов и реконструкцией старых, научными и конструкторскими исследованиями и проектами, организацией и проведением крупных общественных мероприятий и т. п. Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, включающих сотни организаций и десятки тысяч людей, таких как, например, создание крупного территориально-промышленного комплекса.

Впервые методы сетевого планирования были разработаны и применены в США в конце 50-х годов XX века в строительстве: метод *CPM* (метод критического пути) и при разработке ракетной системы «Поларис»: метод *PERT* (метод оценки и обзора программ).

В настоящее время методы сетевого планирования и управления успешно используются:

- для создания календарных планов реализации комплекса работ;
- для управления комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;
- для распределения ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ и повышения эффективности управления в целом;
- для выявления и мобилизации резервов времени, а также трудовых, материальных и денежных ресурсов, и оптимизации сроков исполнения и затрат.

Математической основой методов сетевого планирования и управления является отражение производственного процесса (т. е. последовательности выполняемых работ) в виде так называемого сетевого графика, который представляет собой специфический частный вид взвешенного графа, а также определенная совокупность расчетных методов. В систему СПУ включаются также организационные и контрольные мероприятия по планированию и управлению комплексом работ.

Основными элементами сетевой модели являются *работы* и *события*. Под работой понимается процесс, требующий для своего осуществления затрат определенного времени и ресурсов (материалов, оборудования, исполнителей, финансов, энергии и т. п.). Частным видом работы является *ожидание* – процесс, входящий необходимым элементом в технологию производства, длящийся определенное время и не требующий иных затрат в виде труда или каких-либо ресурсов (например, остывание металла после плавки, просушка после покраски, старение металла, твердение бетона и т. п.).

Особым видом работ являются *фиктивные работы*. Они обозначают логическую связь между работами или группами работ и не требуют затрат ни времени, ни труда, ни материальных ресурсов, продолжительность фиктивной работы считается равной нулю. Фиктивная работа указывает на то, что какая-то работа или группа работ может начаться лишь после того, как завершится какая-то другая (предшествующая) работа или группа работ. Фиктивная работа используется тогда, когда надо отделить друг от друга разные по смысловому содержанию события (окончание и начало работ), которые могут произойти одновременно.

Под событием понимается момент, отражающий определенный этап выполнения проекта, это момент завершения отдельной работы или группы работ и возможность начать новую работу или группу работ. Событие не имеет продолжительности во времени, считается, что событие свершается мгновенно. Среди событий сетевого графика выделяют *исходное* (*начальное*) событие, обозначающее начало работ (начало осуществления проекта) и *завершающее* (*конечное*) событие, которое означает окончание всех работ рассматриваемого комплекса (завершение проекта).

События на сетевом графике изображаются кружочками (вершинами графа), а работы – стрелками (дугами ориентированного графа), при этом фиктивные работы принято изображать пунктирными стрелками.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике должно быть одно исходное (начальное) событие и одно завершающее (конечное) событие. В нем не должно быть других событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа; в нем не должно быть также других событий (кроме завершающего), за которыми не следует непосредственно хотя бы одна работа, т. е. не должно быть так называемых «хвостов» и «тупиков»;

2) любые два события сетевого графика должны быть соединены не более чем одной работой (стрелкой); в случае необходимости вводятся фиктивные работы;

3) в сетевом графике не должно быть циклов и петель.

Исходным материалом для сетевого планирования служит список работ с указанием их взаимной последовательности, обусловленности возможного начала одних работ завершением других (опорой одних работ на другие) и продолжительностью выполнения каждой работы. В случае трехпараметрической модели приводится предположительная продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистический вариант), в наименее благоприятных условиях (пессимистический вариант) и наиболее вероятная продолжительность работы (среднестатистический, нормальный вариант).

Основными задачами сетевого планирования являются:

1) построение сетевого графика и расчет его временных характеристик (метод критического пути);

2) расчет вероятностных показателей для трехпараметрической или двухпараметрической сетевой модели;

3) оптимизация стоимости выполнения проекта.

Рассмотрим подробно методы решения этих задач на модельных примерах.

ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Задача 1
Метод критического пути

Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице.

Работа	Продолжительность работы	Опирается на работы
b_1	5	–
b_2	8	–
b_3	3	–
b_4	6	b_1
b_5	4	b_1
b_6	1	b_3
b_7	2	b_2, b_5, b_6
b_8	6	b_2, b_5, b_6
b_9	3	b_4, b_7
b_{10}	9	b_3
b_{11}	7	b_2, b_5, b_6, b_{10}

Или в компактной записи:
$b_1(5)\to b_4(6),b_5(4)$; $b_3(3)\to b_6(1),b_{10}(9)$; $b_2(8),b_5(4),b_6(1)\to b_7(2),b_8(6)$; $b_4(6),b_7(2)\to b_9(3)$; $b_2(8),b_5(4),b_6(1),b_{10}(9)\to b_{11}(7)$.

Решение

Сначала строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий (рис. 1):

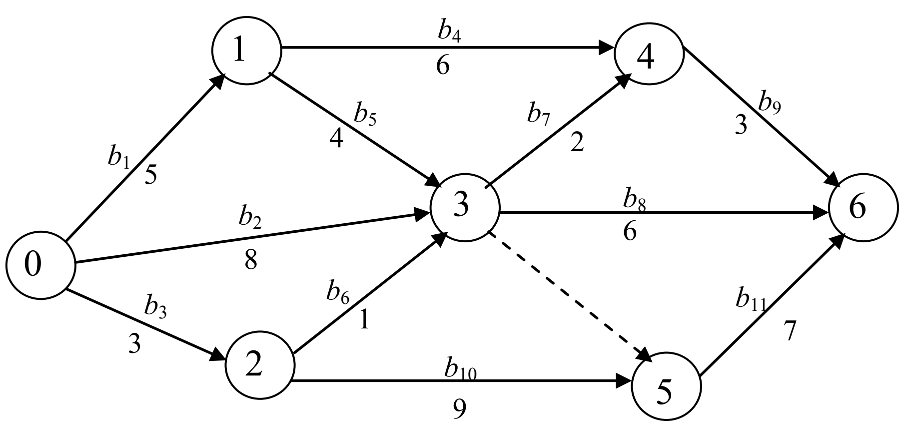


Рис. 1

Наиболее ранние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_{\text{р}}(i) = \max_{j \subset i} \{T_{\text{р}}(j) + t_{ji}\},$$

где максимум берется по всем событиям j, непосредственно предшествующим событию i. Начальному событию присваиваем $T_{\text{р}}(0) = 0$.

Тогда:

$T_{\text{р}}(1) = T_{\text{р}}(0) + t_{01} = 0 + 5 = 5;$

$T_{\text{р}}(2) = T_{\text{р}}(0) + t_{02} = 0 + 3 = 3;$

$T_{\text{р}}(3) = \max\{T_{\text{р}}(0) + t_{03}, T_{\text{р}}(1) + t_{13}, T_{\text{р}}(2) + t_{23}\} = \max\{5 + 4, 0 + 8, 3 + 1\} = 9;$

$T_{\text{р}}(4) = \max\{T_{\text{р}}(1) + t_{14}, T_{\text{р}}(3) + t_{34}\} = \max\{5 + 6, 9 + 2\} = 11;$

$T_{\text{р}}(5) = \max\{T_{\text{р}}(2) + t_{25}, T_{\text{р}}(3) + t_{35}\} = \max\{3 + 9, 9 + 0\} = 12;$

$T_{\text{р}}(6) = \max\{T_{\text{р}}(3) + t_{36}, T_{\text{р}}(4) + t_{46}, T_{\text{р}}(5) + t_{56}\} = \max\{9 + 6, 11 + 3, 12 + 7\} = 19.$

Итак, критическое время $T_{\text{кр}} = 19$. Минимальный срок выполнения проекта – 19 дней.

Наиболее поздние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_{\text{п}}(i) = \min_{j \supset i} \{T_{\text{п}}(j) - t_{ij}\},$$

где минимум берется по всем событиям j, непосредственно следующим за событием i. Конечному событию присваиваем наиболее поздний срок наступления, равный критическому времени: $T_{\text{п}}(6) = T_{\text{кр}} = 19$.

Тогда:

$T_{\text{п}}(5) = T_{\text{п}}(6) - t_{56} = 19 - 7 = 12;$

$T_{\text{п}}(4) = T_{\text{п}}(6) - t_{46} = 19 - 3 = 16;$

$T_{\text{п}}(3) = \min\{T_{\text{п}}(6) - t_{36}, T_{\text{п}}(5) - t_{35}, T_{\text{п}}(4) - t_{34}\} = \min\{19 - 6, 12 - 0, 16 - 2\} = 12;$

$T_{\text{п}}(2) = \min\{T_{\text{п}}(5) - t_{25}, T_{\text{п}}(3) - t_{23}\} = \min\{12 - 9, 12 - 1\} = 3;$

$T_{\text{п}}(1) = \min\{T_{\text{п}}(4) - t_{14}, T_{\text{п}}(3) - t_{13}\} = \min\{16 - 6, 12 - 4\} = 8;$

$T_{\text{п}}(0) = \min\{T_{\text{п}}(3) - t_{03}, T_{\text{п}}(2) - t_{02}, T_{\text{п}}(1) - t_{01}\} = \min\{12 - 8, 3 - 3, 8 - 5\} = 0.$

Результаты расчетов отразим на сетевом графике. Ранние сроки наступления событий запишем над кружками, изображающими эти события, поздние сроки наступления событий – под кружками (рис. 2).

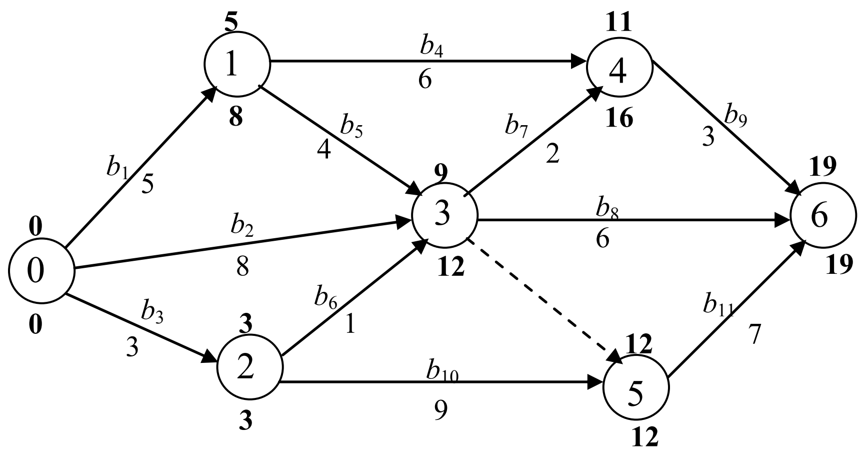


Рис. 2

Критическое время $T_{кр} = 19$.

Временные характеристики событий представлены в таблице:

Событие	Ранний срок $T_р(i)$	Поздний срок $T_п(i)$	Резерв времени $R(i)$
* 0	0	0	0
1	5	8	3
* 2	3	3	0
3	9	12	3
4	11	16	5
* 5	12	12	0
* 6	19	19	0

Резервы времени событий найдены по формуле $R(i) = T_п(i) - T_р(i)$.

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6.

Найдем резервы времени работ.

Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее раннему сроку наступления события i: $S_р(b_k) = T_р(i)$, а наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_k = (i, j)$ равен наиболее позднему сроку наступления события j: $E_п(b_k) = T_п(j)$.

Полный резерв времени работ найдем по формуле

$$r_п(b_k) = r_п(i, j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij} = E_п(b_k) - S_р(b_k) - t_{ij}.$$

Независимый резерв времени работ найдем по формуле

$$r_н(b_k) = r_н(i, j) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij}.$$

Сведем полученные данные в таблицу:

Работа $b_k = (i, j)$	Продолжительность работы, $t(b_k) = t_{ij}$	$S_р(b_k)$	$E_п(b_k)$	$r_п(b_k)$	$r_н(b_k)$
$b_1 = (0, 1)$	5	0	8	3	0
$b_2 = (0, 3)$	8	0	12	4	1
* $b_3 = (0, 2)$	3	0	3	0	0
$b_4 = (1, 4)$	6	5	16	5	–3
$b_5 = (1, 3)$	4	5	12	3	–3
$b_6 = (2, 3)$	1	3	12	8	5
$b_7 = (3, 4)$	2	9	16	5	–3
$b_8 = (3, 6)$	6	9	19	4	1
$b_9 = (4, 6)$	3	11	19	5	0
* $b_{10} = (2, 5)$	9	3	12	0	0
* $b_{11} = (5, 6)$	7	12	19	0	0
$\varphi = (3, 5)$	0	9	12	3	0

Работа $\varphi = (3, 5)$ – фиктивная работа.

Критические работы – b_3, b_{10}, b_{11}. Резервы времени этих работ равны нулю. Выделим критический путь двойными стрелками (рис. 3).

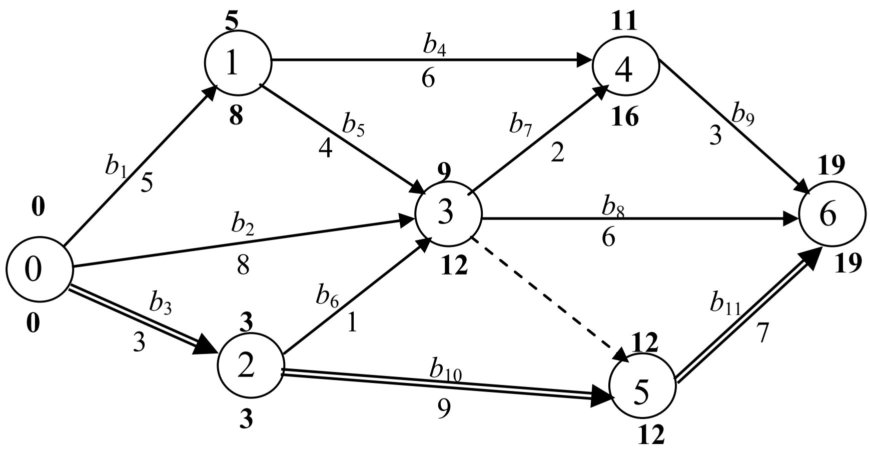


Рис. 3

Резерв времени некритической дуги b находим как разность между длиной замыкающего критического участка и длиной самой некритической дуги:

$$R(b) = a - b.$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$

Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг:

Некритические дуги	a	b	Резерв времени дуги, $R(b)$	Коэффициент напряженности дуги, $N(b)$
(2, 3, 5)	9	1	8	1/9 ≈ 0,11
(0, 3, 5)	12	8	4	2/3 ≈ 0,67
(0, 1, 3, 5)	12	9	3	3/4 = 0,75
(0, 3, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(0, 1, 3, 6)	19	15	4	15/19 ≈ 0,79
(0, 1, 4, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(0, 1, 3, 4, 6)	19	14	5	14/19 ≈ 0,74
(2, 3, 6)	16	7	9	7/16 ≈ 0,44
(2, 3, 4, 6)	16	6	10	6/16 = 0,375

Дуги, коэффициент напряженности которых $N(b) > 0{,}8$, составляют критическую зону, дуги с коэффициентом напряженности $0{,}6 \le N(b) \le 0{,}8$ образуют подкритическую зону, а дуги с коэффициентом $N(b) < 0{,}6$ дают резервную зону. В нашем случае в критическую зону попадает только критический путь, в подкритической зоне находятся дуги (0, 1, 3, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 3, 6), (0, 1, 4, 6), (0, 1, 3, 4, 6) и (0, 3, 5). Из них самая напряженная дуга (0, 1, 3, 6). Она быстрее других может перейти на критический путь. Дуги (2, 3, 5), (2, 3, 6) и (2, 3, 4, 6) образуют резервную зону.

Задача 2
Вероятностные характеристики сетевых планов

Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью $P = 0{,}9973$) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью. Данные приведены в таблице.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$
b_1	–	8	5	3
b_2	–	10	9	4
b_3	–	6	2	1
b_4	b_1	9	7	1
b_5	b_1	5	4	1
b_6	b_3	2	1	1
b_7	b_2, b_5, b_6	4	2	1
b_8	b_2, b_5, b_6	13	5	4
b_9	b_4, b_7	8	2	1
b_{10}	b_3	17	8	6
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	8	2

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир} = 21$ день. Заданная надежность $\gamma = 0{,}95$.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

Решение.

Найдем ожидаемую продолжительность работ ($t_{ож}$) для трехпараметрической модели по формуле

$$t_{ож} = \frac{t_{пес} + 4t_{вер} + t_{опт}}{6}.$$

Например, $t_{ож}(b_1) = \frac{8 + 4 \cdot 5 + 3}{6} = \frac{31}{6} \approx 5{,}17 \approx 5;$

$$t_{ож}(b_2) = \frac{10 + 4 \cdot 9 + 4}{6} = \frac{50}{6} \approx 8{,}33 \approx 8;$$

$$t_{\text{ож}}(b_3) = \frac{6+4\cdot 2+1}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5 \approx 3;$$

$$t_{\text{ож}}(b_4) = \frac{9+4\cdot 7+1}{6} = \frac{38}{6} \approx 6{,}33 \approx 6;$$

$$t_{\text{ож}}(b_5) = \frac{5+4\cdot 4+1}{6} = \frac{22}{6} \approx 3{,}67 \approx 4;$$

и т. д.

Для упрощения дальнейших вычислений округляем полученные величины до целых чисел (по правилам округления с избытком и недостатком).

Для сравнения найдем также ожидаемую продолжительность работ ($t^*_{\text{ож}}$) для двухпараметрической модели по формуле

$$t^*_{\text{ож}} = \frac{3t_{\text{пес}} + 2t_{\text{опт}}}{5}.$$

Например, $t^*_{\text{ож}}(b_1) = \dfrac{3\cdot 8+2\cdot 3}{5} = \dfrac{30}{5} = 6;$

$$t^*_{\text{ож}}(b_2) = \frac{3\cdot 10+2\cdot 4}{5} = \frac{38}{5} = 7{,}6 \approx 8;$$

$$t^*_{\text{ож}}(b_3) = \frac{3\cdot 6+2\cdot 1}{5} = \frac{20}{5} = 4;$$

$$t^*_{\text{ож}}(b_4) = \frac{3\cdot 9+2\cdot 1}{5} = \frac{29}{5} = 5{,}8 \approx 6;$$

$$t^*_{\text{ож}}(b_5) = \frac{3\cdot 5+2\cdot 1}{5} = \frac{17}{5} = 3{,}4 \approx 3;$$

и т. д.

Двухпараметрическая модель проще, но дает менее точные оценки.

Для вычисления дисперсий продолжительностей работ воспользуемся формулой

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}) = \left(\frac{t_{\text{пес}} - t_{\text{опт}}}{6}\right)^2.$$

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}(b_1)) = \left(\frac{8-3}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}69;$$

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}(b_2)) = \left(\frac{10-4}{6}\right)^2 = 1;$$

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}(b_3)) = \left(\frac{6-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}69;$$

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}(b_4)) = \left(\frac{9-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{8}{6}\right)^2 \approx 1{,}78;$$

$$\sigma^2(t_{\text{ож}}(b_5)) = \left(\frac{5-1}{6}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \approx 0{,}44;$$

и т. д.

Дополним исходную таблицу полученными значениями:

Работа	Опирается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	$t_{\text{ож}}$	$t^*_{\text{ож}}$	σ^2
b_1	–	8	5	3	5	6	0,69
b_2	–	10	9	4	8	8	1,00
b_3	–	6	2	1	3	4	0,69
b_4	b_1	9	7	1	6	6	1,78
b_5	b_1	5	4	1	4	3	0,44
b_6	b_3	2	1	1	1	2	0,03
b_7	b_2, b_5, b_6	4	2	1	2	3	0,25
b_8	b_2, b_5, b_6	13	5	4	6	9	2,25
b_9	b_4, b_7	8	2	1	3	5	1,36
b_{10}	b_3	17	8	6	9	13	3,36
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	8	2	7	7	1,78

Таким образом трехпараметрическая модель сведена к однопараметрической.

Теперь можно построить сетевой график и рассчитать его временные характеристики (рис. 4).

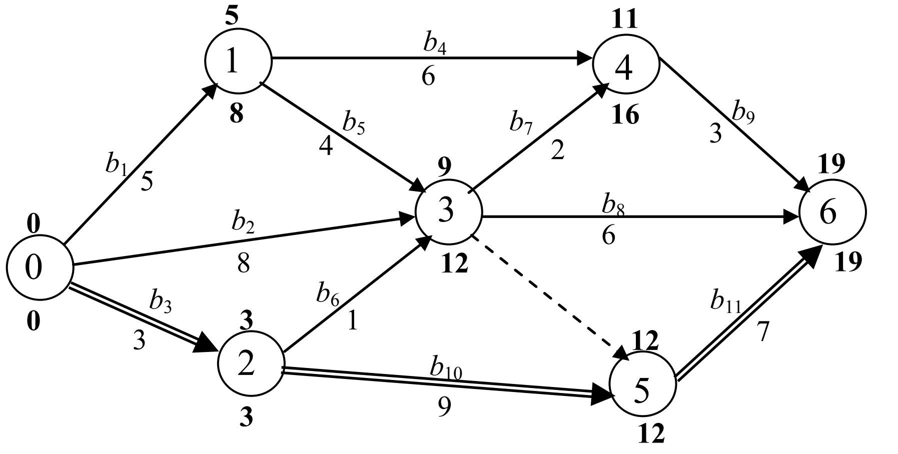


Рис. 4

Работа	Опирается на работы	$t_{ож}$	σ^2
b_1	–	5	0,69
b_2	–	8	1,00
* b_3	–	3	0,69
b_4	b_1	6	1,78
b_5	b_1	4	0,44
b_6	b_3	1	0,03
b_7	b_2, b_5, b_6	2	0,25
b_8	b_2, b_5, b_6	6	2,25
b_9	b_4, b_7	3	1,36
* b_{10}	b_3	9	3,36
* b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	7	1,78

Ожидаемое критическое время $T_{кр} = 19$.

На критическом пути лежат работы b_3, b_{10}, b_{11}.

Найдем дисперсию критического пути.

$$\sigma^2_{кр} = \sigma^2(b_3) + \sigma^2(b_{10}) + \sigma^2(b_{11}) = 0{,}69 + 3{,}36 + 1{,}78 = 5{,}83.$$

Среднеквадратическое отклонение критического пути

$$\sigma_{кр} = \sqrt{5{,}83} \approx 2{,}41.$$

Найдем вероятность того, что проект будет выполнен не позднее заданного срока ($T_{дир} = 21$ день):

$$P(t_{кр} \le 21) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{21-19}{2{,}41}\right) = 0{,}5 + \Phi(0{,}83) \approx 0{,}5 + 0{,}2967 \approx 0{,}8.$$

Таким образом, имеются неплохие шансы (80 %) выполнить проект в заданный срок.

Найдем интервал гарантированного времени выполнения проекта. Воспользуемся правилом «трех сигм»: $3\sigma_{кр} = 3 \cdot 2{,}41 = 7{,}23 \approx 7$, т. е. с вероятностью почти 0,9973 проект будет выполнен за 19 ± 7 дней.

$$P(12 \le t_{кр} \le 26) = P(|t_{кр} - 19| \le 7) \approx P(|t_{кр} - 19| \le 3\sigma_{кр}) = 0{,}9973.$$

(Более точное значение:

$$P(12 \le t_{кр} \le 26) = P(|t_{кр} - 19| \le 7) = 2\Phi\left(\frac{7}{2{,}41}\right) = 2\Phi(2{,}90) = 2 \cdot 0{,}4981 = 0{,}9962.)$$

$$P(t_{кр} \le 26) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{26-19}{2{,}41}\right) = 0{,}5 + \Phi(2{,}90) = 0{,}5 + 0{,}4981 = 0{,}9981.$$

Следовательно, можно с большой долей уверенности гарантировать, что максимальный срок выполнения проекта не превысит 26 дней.

Оценим максимально возможный срок T выполнения проекта с заданной надежностью $\gamma = 0{,}95$.

По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение) найдем доверительный коэффициент z_γ для заданной надежности γ.

Так как $P(|t_{\text{кр}} - T_{\text{кр}}| \le z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}) = 2\Phi\left(\dfrac{z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 2\Phi(z_{0,95}) = 0{,}95,$

то из $2\Phi(z_{0,95}) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \Phi(z_{0,95}) = 0{,}475 \quad z_{0,95} = 1{,}96$ и

$$P(|t_{\text{кр}} - 19| \le 1{,}96 \cdot 2{,}41) = P(|t_{\text{кр}} - 19| \le 4{,}72) = P(14{,}28 \le t_{\text{кр}} \le 23{,}72) = 0{,}95.$$

Это значит, что с надежностью 0,95 проект будет завершен в период от 14 до 24 дней.

Более точную оценку максимально возможного срока T завершения проекта с данной надежностью γ можно получить из формулы

$$P(t_{\text{кр}} \le T) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{T - T_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 0{,}5 + \Phi(z_\gamma) = \gamma, \text{ где } T - T_{\text{кр}} = z_\gamma\sigma_{\text{кр}}.$$

В нашем случае $0{,}5 + \Phi(z_{0,95}) = 0{,}95 \quad \Phi(z_{0,95}) = 0{,}45,$

$z_{0,95} = 1{,}65$ и

$T = T_{\text{кр}} + z_\gamma\sigma_{\text{кр}} = 19 + 1{,}65 \cdot 2{,}41 \approx 19 + 3{,}98 = 22{,}98 \quad 23$, т. е. с надежностью 0,95 проект будет завершен не позже 23 дней.

Здесь использована функция Лапласа вида $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.

Следует также помнить, что функция Лапласа данного вида нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при $x \ge 5$ значение $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Рассмотрим теперь двухпараметрическую модель. Такая модель используется в тех случаях, когда сложно определить наиболее вероятные продолжительности выполнения отдельных работ. Ожидаемая продолжительность работ ($t^*_{\text{ож}}$) для двухпараметрической модели нами уже вычислена. Среднеквадратическое отклонение этих продолжительностей то же, что и у трехпараметрической модели.

Итак, для двухпараметрической модели имеются следующие данные, представленные в таблице:

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{опт}$	$t^*_{ож}$	σ^2
b_1	–	8	3	6	0,69
b_2	–	10	4	8	1,00
b_3	–	6	1	4	0,69
b_4	b_1	9	1	6	1,78
b_5	b_1	5	1	3	0,44
b_6	b_3	2	1	2	0,03
b_7	b_2, b_5, b_6	4	1	3	0,25
b_8	b_2, b_5, b_6	13	4	9	2,25
b_9	b_4, b_7	8	1	5	1,36
b_{10}	b_3	17	6	13	3,36
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	2	7	1,78

Проведем анализ полученной модели. Найдем временные характеристики событий и работ. Построим структурный сетевой график (рис. 5).

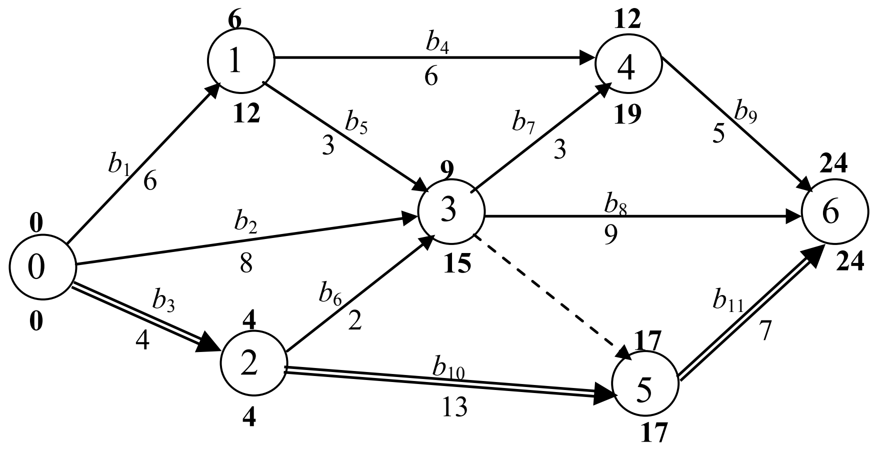


Рис. 5

Сроки наступления и резервы времени событий указаны в таблице:

Событие	Ранний срок $T_р(i)$	Поздний срок $T_п(i)$	Резерв времени $R(i)$
* 0	0	0	0
1	6	12	6
* 2	4	4	0
3	9	15	6
4	12	19	7
* 5	17	17	0
* 6	24	24	0

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6. Критическое время $T_{кр}$ = 24 дня.

Характеристики работ указаны в таблице:

Работа	$t^*_{ож}$	σ^2	$S_р(b_k)$	$S_п(b_k)$	$E_р(b_k)$	$E_п(b_k)$	$r_п(b_k)$	$r_н(b_k)$
$b_1 = (0,1)$	6	0,69	0	6	6	12	6	0
$b_2 = (0,3)$	8	1,00	0	7	8	15	7	1
* $b_3 = (0,2)$	4	0,69	0	0	4	4	0	0
$b_4 = (1,4)$	6	1,78	6	13	12	19	7	–6
$b_5 = (1,3)$	3	0,44	6	12	9	15	6	–6
$b_6 = (2,3)$	2	0,03	4	13	6	15	9	3
$b_7 = (3,4)$	3	0,25	9	16	12	19	7	–6
$b_8 = (3,6)$	9	2,25	9	15	18	24	6	0
$b_9 = (4,6)$	5	1,36	12	19	17	24	7	0
*$b_{10} = (2,5)$	13	3,36	4	4	17	17	0	0
*$b_{11} = (5,6)$	7	1,78	17	17	24	24	0	0
$\varphi = (3,5)$	0	0	9	17	9	17	¤ 8	2

$\varphi = (3,5)$ – фиктивная работа.

Критические работы – b_3, b_{10}, b_{11}. Резервы времени этих работ равны нулю.

Найдены наиболее ранние и наиболее поздние сроки начала и окончания каждой работы.

Наиболее ранний возможный срок начала работы $b_k = (i, j)$:

$$S_р(b_k) = S_р(i, j) = T_р(i).$$

Наиболее поздний допустимый срок начала работы $b_k = (i, j)$:

$$S_п(b_k) = S_п(i, j) = T_п(j) - t_{ij}.$$

Наиболее ранний возможный срок окончания работы $b_k = (i, j)$:

$$E_р(b_k) = E_р(i, j) = T_р(i) + t_{ij}.$$

Наиболее поздний допустимый срок окончания работы $b_k = (i, j)$:

$$E_п(b_k) = E_п(i, j) = T_п(j).$$

Полный резерв работы $b_k = (i, j)$ можно найти и проверить по формуле:

$$r_п(b_k) = r_п(i, j) = T_п(j) - T_р(i) - t_{ij} = S_п(b_k) - S_р(b_k) = E_п(b_k) - E_р(b_k).$$

Независимый резерв работы $b_k = (i, j)$ может быть найден по формулам

$$r_н(b_k) = r_н(i, j) = T_р(j) - T_п(i) - t_{ij} = r_п(i, j) - R(i) - R(j).$$

Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг запишем в таблицу:

Некритические дуги	Резерв времени дуги, $R(b)$	Коэффициент напряженности дуги, $N(b)$
(2, 3, 5)	11	$2/13 \approx 0{,}15$
(0, 3, 5)	9	$8/17 \approx 0{,}47$
(0, 1, 3, 5)	8	$9/17 = 0{,}53$
(0, 3, 6)	7	$17/24 \approx 0{,}71$
(0, 1, 3, 6)	6	$18/24 \approx 0{,}75$
(0, 1, 4, 6)	7	$17/24 \approx 0{,}71$
(0, 1, 3, 4, 6)	7	$17/24 \approx 0{,}71$
(2, 3, 6)	9	$11/20 = 0{,}55$
(2, 3, 4, 6)	10	$10/20 = 0{,}50$

Итак, ожидаемое критическое время $T_{кр} = 24$.

На критическом пути лежат работы b_3, b_{10}, b_{11}.

Найдем дисперсию критического пути.

$\sigma^2_{кр} = \sigma^2(b_3) + \sigma^2(b_{10}) + \sigma^2(b_{11}) = 0{,}69 + 3{,}36 + 1{,}78 = 5{,}83.$

Среднеквадратическое отклонение критического пути

$$\sigma_{кр} = \sqrt{5{,}83} \approx 2{,}41.$$

Найдем вероятность того, что проект будет выполнен не позднее заданного срока ($T_{дир} = 21$ день):

$$P(t_{кр} \le 21) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{21-24}{2{,}41}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}24) \approx 0{,}5 - 0{,}3925 \approx 0{,}11.$$

Вероятность выполнить проект в заданный срок очень невелика (11 %).

Найдем интервал гарантированного времени выполнения проекта. Воспользуемся правилом «трех сигм»: $3\sigma_{кр} = 3 \cdot 2{,}41 = 7{,}23 \approx 7$, т. е. с вероятностью почти 0,9973 проект будет выполнен за 24 ± 7 дней.

$$P(17 \le t_{кр} \le 31) = P(|t_{кр} - 24| \le 7) \approx P(|t_{кр} - 24| \le 3\sigma_{кр}) = 0{,}9973.$$

(Более точное значение:

$$P(17 \le t_{\text{кр}} \le 31) = P(|t_{\text{кр}} - 24| \le 7) = 2\Phi\left(\frac{7}{2{,}41}\right) = 2\Phi(2{,}90) = 2 \cdot 0{,}4981 = 0{,}9962.)$$

$$P(t_{\text{кр}} \le 31) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{31 - 24}{2{,}41}\right) = 0{,}5 + \Phi(2{,}90) = 0{,}5 + 0{,}4981 = 0{,}9981.$$

Следовательно, можно с большой долей уверенности гарантировать, что максимальный срок выполнения проекта не превысит 31 день.

Оценим максимально возможный срок T выполнения проекта с заданной надежностью $\gamma = 0{,}95$.

По таблице значений функции Лапласа найдем доверительный коэффициент z_γ для заданной надежности γ.

Так как $P(|t_{\text{кр}} - T_{\text{кр}}| \le z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}) = 2\Phi\left(\dfrac{z_{0,95}\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 2\Phi(z_{0,95}) = 0{,}95,$

то из $2\Phi(z_{0,95}) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \Phi(z_{0,95}) = 0{,}475 \Rightarrow z_{0,95} = 1{,}96$ и

$$P(|t_{\text{кр}} - 24| \le 1{,}96 \cdot 2{,}41) = P(|t_{\text{кр}} - 24| \le 4{,}72) = P(19{,}28 \le t_{\text{кр}} \le 28{,}72) = 0{,}95.$$

Это значит, что с надежностью 0,95 проект будет завершен в период от 19 до 29 дней.

Более точную оценку максимально возможного срока T завершения проекта с данной надежностью γ можно получить из формулы

$$P(t_{\text{кр}} \le T) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{T - T_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}}\right) = 0{,}5 + \Phi(z_\gamma) = \gamma,\ \text{ где } T - T_{\text{кр}} = z_\gamma\sigma_{\text{кр}}.$$

В нашем случае $0{,}5 + \Phi(z_{0,95}) = 0{,}95 \Rightarrow \Phi(z_{0,95}) = 0{,}45 \Rightarrow$

$z_{0,95} = 1{,}65$ и

$T = T_{\text{кр}} + z_\gamma\sigma_{\text{кр}} = 24 + 1{,}65 \cdot 2{,}41 \approx 24 + 3{,}98 = 27{,}98 \;\; 28$, т. е. с надежностью 0,95 проект будет завершен не позже 28 дней.

Рассмотрим самую напряженную некритическую дугу. Это дуга (0, 1, 3, 6). Ее коэффициент напряженности 0,75. В зависимости от величины коэффициента напряженности выделяют три зоны: критическую (с коэффициентом напряженности, большим 0,8), подкритическую ($0{,}6 \le N(b) \le 0{,}8$), резервную ($N(b) < 0{,}6$). Дуга (0, 1, 3, 6) попадает в подкритическую зону. Найдем ее среднеквадратическое отклонение.

$$\sigma^2(0,1,3,6) = \sigma^2(0,1) + \sigma^2(1,3) + \sigma^2(3,6) = \sigma^2(b_1) + \sigma^2(b_5) + \sigma^2(b_8) =$$
$$= 0,69 + 0,44 + 2,25 = 3,38.$$
$$\sigma\,(0,1,3,6) = \sqrt{3,38} \approx 1,84 \approx 2.$$

Среднеквадратическое отклонение данной дуги (1,84) меньше среднеквадратического отклонения критического пути (2,41). Значит, ожидаемое значение этой дуги 18 ± 1,84; это меньше, чем ожидаемое значение критической дуги (24 ± 2,41), на которую эта некритическая дуга опирается. Это означает, что переход на данную дугу критического пути маловероятен. В связи с этим рассматривать ее как претендента на критический путь не следует.

Если среднеквадратическое отклонение некритической дуги больше среднеквадратического отклонения критической дуги, на которую она опирается, и ожидаемое значение такой дуги с учетом этого отклонения может превысить ожидаемое значение опорной критической дуги, то следует найти вероятностные характеристики критического пути, проходящего через такую дугу. В качестве окончательного показателя выбирают наихудшие показатели альтернативных критических путей.

Если в сетевом графике имеются параллельные критические пути, то для расчета вероятностных характеристик нужно выбрать критический путь с наибольшим среднеквадратическим отклонением.

Задача 3
Методы оптимизации стоимости сетевых проектов

В таблице представлены следующие данные:

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	8	3	6
b_2	–	10	4	8
b_3	–	6	1	4
b_4	b_1	9	1	6
b_5	b_1	5	1	3
b_6	b_3	2	1	2
b_7	b_2, b_5, b_6	4	1	3
b_8	b_2, b_5, b_6	13	4	9
b_9	b_4, b_7	8	1	5
b_{10}	b_3	17	6	10
b_{11}	b_2, b_5, b_6, b_{10}	10	2	7

Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: $S = 10$.

Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Решение.

Составим сетевой график для работ с максимальной продолжительностью (рис. 6).

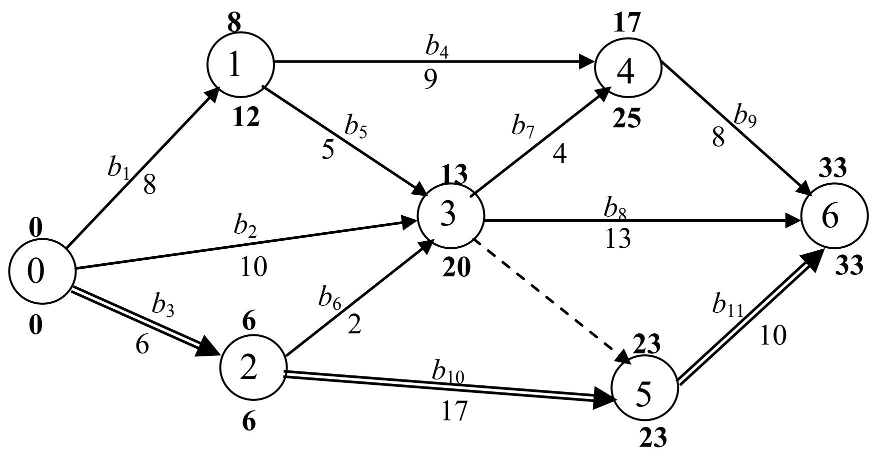


Рис. 6

$T_{кр} = 33$. Стоимость проекта $S(t_{max}) = 33 \cdot 10 = 330$ ден. ед.

Рассмотрим возможности сокращения стоимости проекта за счет увеличения интенсивности работ на критическом пути.

Найдем резервы некритических дуг:

$R(2, 3, 6) = (17 + 10) – (2 + 13) = 27 – 15 = 12$,

$R(0, 3, 6) = T_{кр} – (10 + 13) = 33 – 23 = 10$,

$R(0, 3, 4, 6) = 33 – (10 + 4 + 8) = 33 – 22 =11$,

$R(0, 1, 3, 6) = 33 – (8 + 5 +13) = 33 – 26 = 7$,

$R(0, 1, 3, 4, 6) = 33 – (8 + 5 + 4 +8) = 33 – 25 = 8$,

$R(0, 1, 4, 6) = 33 – (8 + 9 + 8) = 33 – 25 = 8$,

Резервы некритических дуг, включающих фиктивную работу:

$R(2, 3, 5) = 17 – (2 + 0) = 17 – 2 = 15$,

$R(0, 3, 5) = (6 + 17) – (10 + 0) = 23 – 10 = 13$,

$R(0, 1, 3, 5) = (6 + 17) – (8 + 5 + 0) = 23 – 13 = 10$.

Наименьший резерв имеет дуга (0, 1, 3, 6). Он равен семи дням.

Эта дуга опирается на весь критический путь. Если сократить имеющийся критический путь на 7 дней, то возникнет параллельный критический путь, проходящий через эту дугу.

Рассмотрим варианты сокращения работ на нашем критическом пути. Обозначим через Δ_k величину сокращения стоимости проекта при сокращении продолжительности работы b_k на 1 день, через $t_k^{с}$ – количество дней, на которое можно сократить работу b_k , а через $\Sigma\Delta_k$ – суммарное сокращение стоимости проекта при сокращении продолжительности работы b_k на дней.

$\Delta_k = S - S_k$, где S – стоимость одного дня проекта, а S_k – стоимость сокращения продолжительности работы b_k на 1 день. Если $\Delta_k < 0$, то стоимость проекта возрастает.

В нашем случае дано, что $S = 10$ ден. ед.

Работа	t_{max}	t_{min}	s_k	$\Delta_k = S - s_k$		$\Sigma\Delta_k = \Delta_k \cdot$
b_3	6	1	4	10 – 4 = 6	6 – 1 = 5	6 5 = 30
b_{10}	17	6	10	10 – 10 = 0	–	–
b_{11}	10	2	7	10 – 7 = 3	2	3 2 = 6

Выгоднее всего сокращать работу b_3. Каждый день сокращения ее продолжительности сокращает стоимость проекта на 6 денежных единиц, но продолжительность этой работы может быть сокращена максимум на 5 дней (до минимально возможной ее продолжительности в 1 день). Остаются еще 2 дня возможного сокращения критического пути. Следующая по выгодности для сокращения работа – работа b_{11}. Резерв ее возможного сокращения 8 дней. Каждый день ее сокращения уменьшает общую стоимость проекта на 3 денежных единицы. Значит, эту работу следует сократить на 2 дня.

Общее сокращение стоимости проекта составит при этом 30 + 6 = = 36 денежных единиц. В результате возникнет второй критический путь. Дальнейшее уменьшение стоимости проекта возможно лишь при одновременном сокращении параллельных критических путей, т. е. при одновременном сокращении двух работ, одна из которых лежит на первом критическом пути, а другая – на втором (рис. 7).

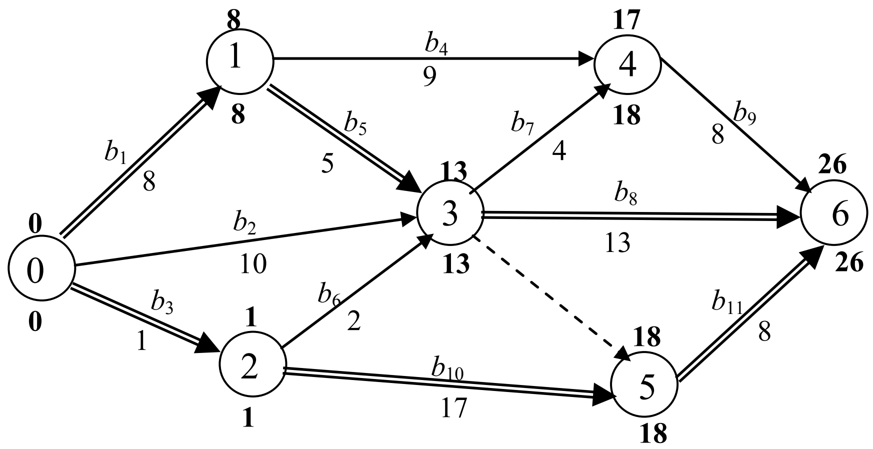


Рис. 7

Критическое время этого варианта – 26 дней.

Рассмотрим резервы новых некритических дуг.

$R(1, 4, 6) = (5 + 13) – (9 + 8) = 18 – 17 = 1$,

$R(3, 4, 6) = 13 – (4 + 8) = 13 – 12 = 1$,

$R(0, 3) = (8 + 5) – 10 = 13 – 10 = 3$.

Работа $b_6 = (2, 3)$ и фиктивная работа $\varphi = (3, 5)$ соединяют события, лежащие на параллельных критических путях. Эти события имеют нулевой резерв времени. Значит, резерв дуг, соответствующих этим работам, равен полному резерву времени этих работ или, по-другому, разности между сроками наступления событий, соединенных этими дугами, минус длина самой дуги.

$R(2, 3) = r_п(b_6) = 13 – 1 – 2 = 10$,

$R(3, 5) = r_п(\varphi) = 18 – 13 – 0 = 5$.

Наименьший резерв имеют дуги (1, 4, 6) и (3, 4, 6). Он равен одному дню. Следовательно, если удастся сократить критические пути на 1 день, то одна из этих дуг или они обе могут стать критическими.

Рассмотрим возможность сокращения пар работ на параллельных критических путях. На каждом из параллельных критических путей следует выбрать работу с наименьшей стоимостью сокращения. На критическом пути (0, 2, 5, 6) это работа b_3, но ее резерв сокращения уже исчерпан, а следующая минимальная по стоимости сокращения работа b_{11}. На втором критическом пути (0, 1, 3, 6) такой работой является работа b_5. Следует проверить, стоит ли сокращать эти работы. Разберем подробнее все варианты. Работа b_3 сокращена до минимума возможной продолжительности. Сокращение работы b_{10} , как мы видели, не дает уменьшения стоимости проекта; может быть сокращено при этом только время выполнения проекта, но нам необходимо сокращать эту работу вместе с другой работой, а это уже приведет к увеличению стоимости проекта. Значит, сокращать эту работу не нужно. Остается рассмотреть пары работ b_{11} и b_1, b_{11} и b_5, b_{11} и b_8. Работа b_{11} уже сокращена до 8 дней.

Работы	Резерв сокращения	$s_k + s_l$	$\Delta_{kl} = S - (s_k + s_l)$	$t_{kl}^{с}$	$\Sigma\Delta_{kl} = \Delta_{kl} \cdot$
$b_{11} + b_1$	min(8 – 2, 8 – 3) = 5	7 + 6	10 – 13 = –3	–	–
$b_{11} + b_5$	min(8 – 2, 5 – 1) = 4	7 + 3	10 – 10 = 0	1	0
$b_{11} + b_8$	min(8 – 2, 13 – 4) = 6	7 + 9	10 – 16 = –6	–	–

Сокращение работ b_{11} и b_1 на один день приведет к увеличению стоимости проекта на 3 ден. ед. Сокращение работ b_{11} и b_8 на один день приведет к увеличению стоимости проекта на 6 ден. ед. Сокращение работ b_{11} и b_5 на один день не уменьшит и не увеличит стоимости проекта, но сократит его общую продолжительность, поэтому имеет смысл сделать это сокращение.

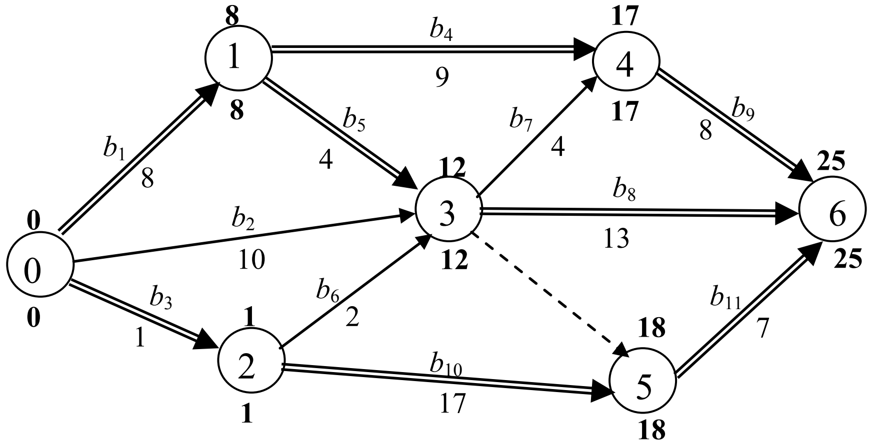


Рис. 8

Возник третий параллельный критический путь (0, 1, 4, 6).

Дальнейшее сокращение работ, сопровождающееся уменьшением стоимости проекта, невозможно, так как для уменьшения критического пути теперь нужно было бы совместно с работами b_{11} и b_5 сокращать какую-нибудь из работ, попавших на новый критический путь: b_4 или b_9, но уже совместное сокращение работ b_{11} и b_5 не дает уменьшения стоимости проекта, а сокращение вместе с ними еще одной работы потребует дополнительных вложений денежных средств.

Итак, получен оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта (рис. 8).

Минимальный срок его выполнения – 25 дней.

Стоимость его выполнения 330 – 36 = 294 ден. ед.

Эту стоимость можно подсчитать и по-другому:

$25 \cdot 10 = 250$ – это стоимость 25 дней работы без дополнительных вложений. К ним надо добавить дополнительные затраты на сокращение работы b_3 на 5 дней, b_{11} на 3 дня и b_5 на 1 день:

$4\ 5 + 7\ 3 + 3\ 1 = 44$ ден. ед.

$S(T_{\text{опт}}) = 250 + 44 = 294$ ден. ед.

В оптимальном варианте имеют резерв времени работы b_2, b_6, b_7:

$r_{\text{п}}(b_2) = 12 - 0 - 10 = 2$ дня,

$r_{\text{п}}(b_6) = 12 - 1 - 2 = 9$ дней,

$r_{\text{п}}(b_7) = 17 - 12 - 4 = 1$ день.

Остальные работы должны выполняться строго в соответствии с графиком.

Для сравнения найдем стоимость проекта при выполнении всех работ с максимальной интенсивностью с помощью данных, указанных в таблице.

Работа	t_{max}	t_{min}	t_k^c	s_k	
b_1	8	3	5	6	30
b_2	10	4	6	8	48
b_3	6	1	5	4	20
b_4	9	1	8	6	48
b_5	5	1	4	3	12
b_6	2	1	1	2	2
b_7	4	1	3	3	9
b_8	13	4	9	9	81
b_9	8	1	7	5	35
b_{10}	17	6	11	10	110
b_{11}	10	2	8	7	56

$$S_{доп} = 30 + 48 + 20 + 48 + 12 + 2 + 9 + 81 + 35 + 110 + 56 = 451.$$

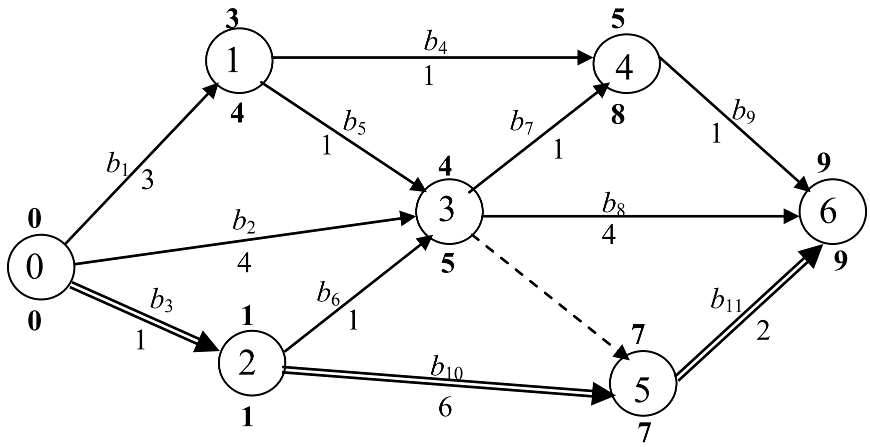


Рис. 9

С максимальной интенсивностью проведения всех работ проект может быть выполнен за 9 дней (рис. 9), но его стоимость составит при этом

$$9 \cdot 10 + 451 = 90 + 451 = 541 \text{ ден. ед.},$$

т. е. почти в два раза больше, чем оптимальный вариант (294 ден. ед.).

Можно уменьшить стоимость проекта, сохранив минимально возможное время его исполнения, если увеличивать продолжительности (т. е. отменять проведенное сокращение) работ, попавших при максимальном сокращении на некритические дуги, так, чтобы возникло максимально возможное число критических путей, т. е. чтобы как можно больше работ попало на критические пути. В первую очередь при этом уменьшать сокращение надо для тех работ, у которых стоимость сокращения больше.

Будем действовать так называемым «обратным ходом». Рассмотрим возникшие некритические дуги после максимального сокращения всех работ. Найдем их резервы.

$R(2, 3, 5) = 6 – (1 + 0) = 6 – 1 = 5,$

$R(0, 3, 5) = (1 + 6) – (4 + 0) = 7 – 4 = 3,$

$R(0, 1, 3, 5) = (1 + 6) – (3 + 1 + 0) = 7 – 4 = 3,$

$R(2, 3, 6) = (6 + 2) – (1 + 4) = 8 – 5 = 3,$

$R(0, 3, 6) = 9 – (4 + 4) = 9 – 8 = 1,$

$R(0, 1, 3, 6) = 9 – (3 +1 + 4) = 9 – 8 = 1,$

$R(2, 3, 4, 6) = (6 + 2) – (1 + 1 + 1) = 8 – 3 = 5,$

$R(0, 3, 4, 6) = 9 – (4 + 1 +1) = 9 – 6 = 3,$

$R(0, 1, 3, 4, 6) = 9 – (3 + 1 + 1 + 1) = 9 – 6 = 3,$

$R(0, 1, 4, 6) = 9 – (3 + 1 + 1) = 9 – 5 = 4.$

Критическое время должно оставаться минимальным, т. е. равным 9 дням. Это значит, что работы, лежащие на критическом пути, остаются неизменными. Их продолжительности сокращены до минимально возможного предела и не подлежат дальнейшему изменению. Продолжительности работ, попавших на некритические дуги, следует увеличить (отменить сокращение), переведя как можно больше некритических дуг на параллельные критические пути. При этом нужно выбрать максимально выгодные комбинации работ, продолжительности которых мы будем одновременно увеличивать. У нас возникли три параллельных некритических дуги: (0, 3, 6), (0, 1, 3, 4, 6) и (0, 1, 4, 6). Резервы времени этих дуг соответственно один, три и четыре дня. Наименьший резерв времени у дуги (0, 3, 6). Для одновременного увеличения этих дуг на один день нужно на каждой дуге выбрать по одной работе так, чтобы суммарная стоимость сокращения этих работ была максимальной. Тогда отмена сокращения продолжительности этих работ на один день приведет к наибольшему снижению стоимости проекта на данном шаге при сохранении минимального времени выполнения всего проекта. Резерв события 3 равен одному дню, поэтому срок наступления этого события может либо остаться прежним, либо увеличиться на один день. При этом резерв фиктивной работы (3, 5) в любом случае будет не меньше, чем $7 - 5 = 2$ дня. Следовательно, дугу (2, 3, 5) пока можно не рассматривать. Рассмотрим возможные варианты увеличения параллельных некритических дуг.

В нашем примере среди работ b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9 (не попавших на критический путь) наибольшая стоимость одного дня сокращения у работы b_8. Она составляет 9 ден. ед. Работа эта лежит на некритической дуге (0, 3, 6), имеющей минимальный резерв времени среди дуг, включающих данную работу. Этот резерв равен одному дню. Убрав лишний день сокращения этой работы (мы ее сократили с 13 до 4 дней, а теперь сократим только до 5 дней), сэкономим на стоимости проекта 9 ден. ед., и дуга, включающая эту работу, станет критической. Одновременно станет критической и дуга (0, 1, 3, 6), также содержащая эту работу и имеющая резерв тоже равный одному дню.

Вместе с работой b_8 можно уменьшить сокращение либо работы b_9, либо одновременно двух работ b_4 и b_7.

Увеличить одновременно длину всех трех параллельных некритических дуг можно также за счет увеличения (отмены сокращения) продолжительности работ b_1 и b_2, или b_2, b_4, b_5, или b_2, b_4, b_7, или b_2, b_9. Совокупности работ b_1, b_8 и b_4, b_5, b_8 не рассматриваем, так как работы b_1, b_8 и b_5, b_8 лежат на дуге (0, 1, 3, 6), имеющей, как и дуга (0, 3, 6), лишь один день резерва, а значит, увеличение продолжительности каждой из этих работ на один день приведет к увеличению длины этой дуги на два дня, что недопустимо.

Найдем наиболее выгодную комбинацию с помощью данных, представленных в таблице.

Дуга	(0, 3, 6)		(0, 1, 3, 4, 6)				(0, 1, 4, 6)		
b_k	b_2	b_8	b_1	b_5	b_7	b_9	b_1	b_4	b_9
s_k	8	9	6	3	3	5	6	6	5

Работы	Суммарная стоимость сокращения: Σs_k
$b_8 + b_9$	9 + 5 = 14
$b_4 + b_7 + b_8$	6 + 3 + 9 = 18
$b_1 + b_2$	6 + 8 = 14
$b_2 + b_4 + b_5$	8 + 6 + 3 = 17
$b_2 + b_4 + b_7$	8 + 6 + 3 =17
$b_2 + b_9$	8 + 5 = 13

Итак, выгоднее всего одновременно уменьшить сокращение на один день работ b_8, b_4 и b_7 (все они были сокращены до минимальной своей продолжительности, так что увеличение их продолжительности на один день возможно). Это даст экономию 18 ден. ед. и приведет к возникновению двух новых критических путей: (0, 3, 6) и (0, 1, 3, 6).

Полученный результат отражен на рис 10.

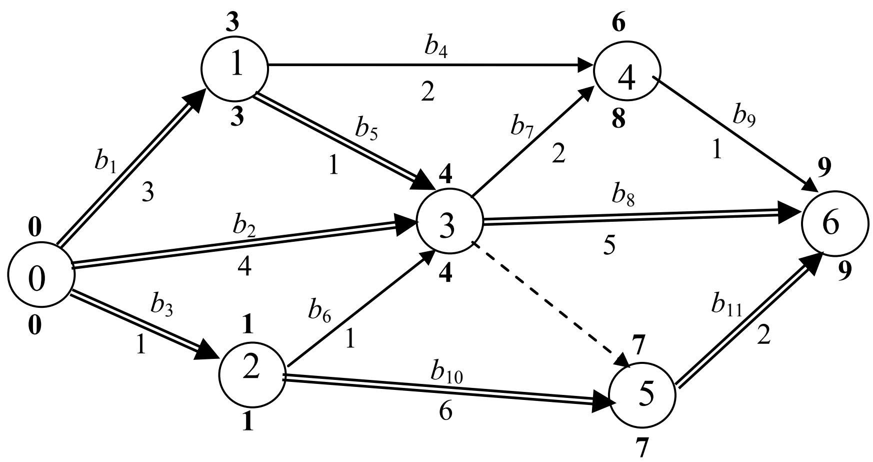


Рис. 10

Новые параллельные некритические дуги – (1, 4, 6) и (3, 4, 6).

Среди оставшихся некритических работ b_4, b_6, b_7, b_9 наибольшую стоимость одного дня сокращения имеет работа b_4. Сокращение продолжительности этой работы на один день стоит 6 ден. ед. Работа b_4 находится на дуге (1, 4, 6), имеющей, с учетом возникших новых критических дуг, резерв $R(1, 4, 6) = (1 + 5) – (2 +1) = 6 – 3 = 3$ дням. Дуга

(3, 4, 6) имеет резерв $R(3, 4, 6) = 5 - (2 + 1) = 2$ дням. Продолжительность работы b_4 теперь сокращена с 9 дней до 2 дней, работы b_7 – с 4 до 2 дней, а работа b_9 имеет максимальное сокращение с 8 до 1 дня. Таким образом, есть возможность одновременно увеличить длины параллельных некритических дуг (1, 4, 6) и (3, 4, 6) на два дня. Это можно сделать за счет увеличения продолжительности работы b_9 или работ b_4 и b_7. Найдем наилучший вариант.

Дуга	(1, 4, 6)		(3, 4, 6)	
b_k	b_4	b_9	b_7	b_9
s_k	6	5	3	5

Работы	Суммарная стоимость сокращения: Σs_k
b_9	5
$b_4 + b_7$	$6 + 3 = 9$

Бóльшую экономию дает совместное увеличение продолжительности работ b_4 и b_7. Увеличивая их на два дня, сэкономим $2 \cdot 9 = 18$ ден. ед. В результате дуга (3, 4, 6) станет критической. Работа b_7 вернет себе максимально допустимую продолжительность (рис. 11).

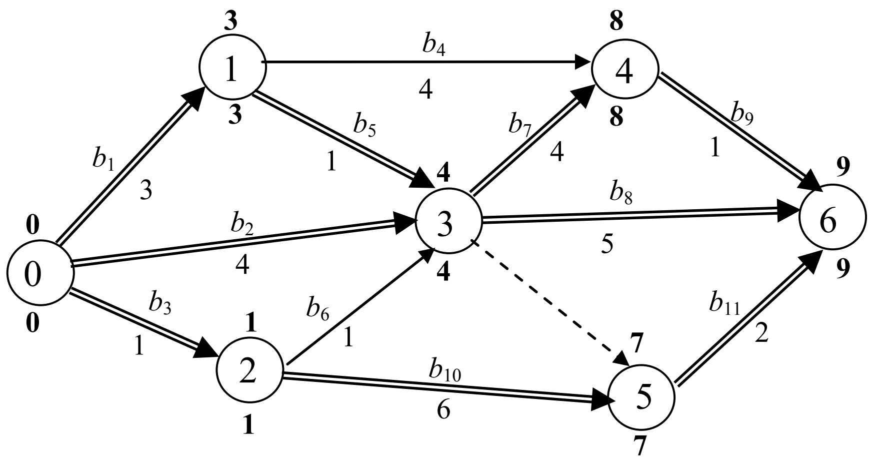


Рис. 11

Некритическими остались теперь только работы b_4 и b_6. Работа b_6 соединяет события, лежащие на разных критических путях, т. е. события с нулевыми резервами времени. Резерв времени дуги (2, 3), содержащей работу b_6, равен полному резерву времени этой работы $r_п(b_6) = 4 - 1 - 1 = 2$ дням, а резерв времени дуги (1, 4), содержащей работу b_4, равен $r_п(b_4) = 8 - 3 - 4 = 1$ дню. Работу b_6 мы сократили с 2 дней до 1 дня, а работу b_4 – с 9 дней до 4 дней. В связи с этим мы можем уменьшить сокращение работы b_6 на 1 день, вернув этой работе ее максимально допустимую продолжительность. Работу b_4 также следует увеличить на 1 день. Дуга (1, 4) при этом превратится в критическую, так как исчерпает свой резерв времени, а дуга (2, 3) останется некритической с резервом времени в 1 день, так как дальнейшее увеличение продолжительности работы b_6 невозможно. Стоимость проекта сократится при этом на $6 \cdot 1 + 2\ 1 = 8$ ден. ед., поскольку стоимость сокращения работы b_4 на один день равна 6 ден. ед., а работы b_6 – 2 ден. ед. Дальнейшее сокращение стоимости проекта при условии выполнения его за 9 дней невозможно, так как единственная оставшаяся некритической работа b_6 имеет максимально возможную продолжительность (рис.12).

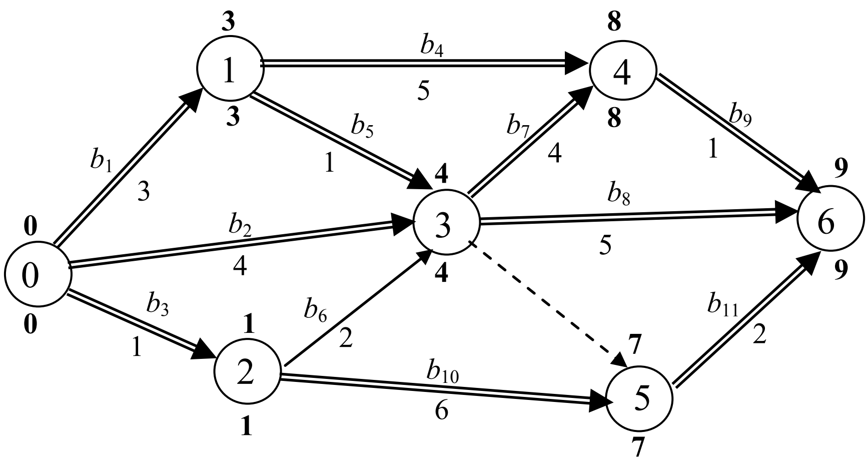


Рис. 12

Для удобства обозрения занесем все выполненные шаги в общую таблицу:

№ шага	Работы	Σs_k	$t^у$	$\Delta S = (\Sigma s_k) \cdot t^у$
1	$b_4 + b_7 + b_8$	6 + 3 + 9 = 18	1	18
2	$b_4 + b_7$	6 + 3 = 9	2	18
3	b_4	6	1	6
4	b_6	2	1	2

Здесь $t^у$ – время увеличения продолжительности работ (в днях), ΔS – сэкономленные средства (в ден. ед.).

В результате проведенных действий мы сэкономим на стоимости проекта (при начальном расчете с минимальными продолжительностями всех его работ) 18 + 18 + 6 + 2 = 44 ден. ед. Таким образом, минимальная стоимость проекта при условии выполнения его в минимально возможный срок (9 дней) составит 541 – 44 = 497 ден. ед.

Проверим полученный результат другим способом подсчета.

Сведем необходимые данные в таблицу.

Пусть $t_{сокр}$ – количество дней, до которого сокращена в этом варианте работа,

$t_k^{с} = t_{max} - t_{сокр}$ – количество дней, на которое сокращена k-я работа,

$\cdot\, s_k$ – стоимость произведенного сокращения k-й работы.

Видим, что до минимально возможной продолжительности сокращены работы b_1, b_2, b_3, b_5, b_9, b_{10}, b_{11}. Работы b_6, b_7 сохранили максимальную продолжительность. Работа b_4 сокращена с 9 до 5 дней, а работа b_8 – с 13 до 5 дней. Данные представлены в таблице.

Работа	t_{max}	t_{min}	$t_{сокр}$			
b_1	8	3	3	5	6	30
b_2	10	4	4	6	8	48
b_3	6	1	1	5	4	20
b_4	9	1	5	4	6	24
b_5	5	1	1	4	3	12
b_6	2	1	2	0	2	0
b_7	4	1	4	0	3	0
b_8	13	4	5	8	9	72
b_9	8	1	1	7	5	35
b_{10}	17	6	6	11	10	110
b_{11}	10	2	2	8	7	56

Дополнительно вложенные в сокращение работ средства составляют

$S_{доп} = 30 + 48 + 20 + 24 + 12 + 72 + 35 + 110 + 56 = 407$ ден. ед.

Стоимость 9 дней проекта равна 10 9 = 90 ден. ед.

Общая минимальная стоимость проекта при условии выполнения его в минимально возможный срок составит 90 + 407 = 497 ден. ед.

З а м е ч а н и е. Тот же результат можно получить и «прямым ходом», продолжая наиболее выгодное сокращение работ на параллельных критических путях после получения оптимального по стоимости варианта проекта. Мы будем по-прежнему уменьшать длину критических путей, но при этом стоимость проекта начнет возрастать. Этот процесс закончится тогда, когда хотя бы один из критических путей будет состоять только из работ, достигших своей минимально возможной продолжительности. Обычно достижение результата «обратным ходом» требует меньшего количества шагов, чем это требуется при «прямом ходе». Проиллюстрируем это на нашем примере пошаговым разбором «прямого хода».

Обозначим через R_k^i оставшийся к i-му шагу резерв сокращения работы b_k, через $T_{\text{кр}}^i$ – длину критического пути, полученную на i-м шаге, через S^i – общую стоимость проекта после i-го шага, через $\Delta^i = S - \Sigma s_k$ – экономию средств, полученную в результате сокращения продолжительностей выбранной совокупности работ на один день, через $t^{\text{с}}$ – количество дней, на которые сокращается выбранная совокупность работ на данном шаге. $S^i = S^{i-1} - t^{\text{с}}\Delta^i$. Если $\Delta^i > 0$, то общая стоимость проекта на i-м шаге снижается, если $\Delta^i < 0$, то повышается.

Начинаем процесс с построения сетевого графика для максимальной продолжительности всех работ (рис. 6). $T_{\text{кр}}^0 = 33$, $S^0 = 330$. Первые три шага приводят к оптимальному по стоимости варианту проекта (рис. 7 и рис. 8). Проделаем их еще раз (не вдаваясь теперь в подробный анализ).

Шаг № 1. Выбираем на критическом пути работу с наименьшей стоимостью ее сокращения. Это работа b_3. Необходимая величина сокращения выбирается как минимум из резерва сокращения самой работы и минимального из резервов некритических дуг, опирающихся на критические участки, содержащие данную работу. Резерв сокращения работы b_3 на этом шаге равен 5 дням, а минимальный из резервов некритических дуг равен 7 дням, поэтому сокращаем работу на 5 дней: $t^c = \min\{5, 7\} = 5$.

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}
s_k	4	10	7
R_k^1	5	11	8

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	$t^с$	$t^с \cdot \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300

Нового критического пути не возникло.

$T_{кр}^1 = 33 - 5 = 28$, $S^1 = 330 - 30 = 300$.

Шаг № 2. Критический путь остался прежним, но резерв сокращения работы b_3 стал равным нулю. Теперь работа с минимальной стоимостью сокращения, за счет которой можно уменьшить критический путь, это работа b_{11}. Резерв ее сокращения равен 8 дням. Минимальный из резервов некритических дуг на этом шаге – резерв дуги (0, 1, 3, 6), ставший равным двум дням. Следовательно, $t^c = \min\{8, 2\} = 2$.

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}
s_k	4	10	7
R_k^2	0	11	8

№ шага	Работы	Σs_k					
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294

Возник параллельный критический путь (0, 1, 3,6) (рис. 7).

Теперь $T_{кр}^2 = 28 - 2 = 26$, $S^2 = 300 - 6 = 294$.

Шаг № 3. У нас два параллельных критических пути. На каждом из них выбираем по одной работе с наименьшей стоимостью сокращения (и резервом сокращения, естественно, отличным от нуля).

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9
R_k^3	0	11	6	5	4	9

Это работы b_{11} и b_5. Резерв сокращения работы b_{11} уменьшился до 6 дней. Наименьший резерв у некритических дуг (1, 4, 6) и (3, 4, 6) равен одному дню. Следовательно,

$$t^{c} = \min\{R_{11}^3, R_5^3, R(1,4,6), R(3,4,6)\} = \min\{6, 4, 1, 1\} = 1.$$

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c \cdot \Delta^i$	$T_{кр}^i$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294

Итак, на третьем шаге достигнут оптимальный по стоимости вариант проекта (рис. 13). Возник новый критический путь (0, 1, 4, 6), дуга (1, 4, 6) стала критической.

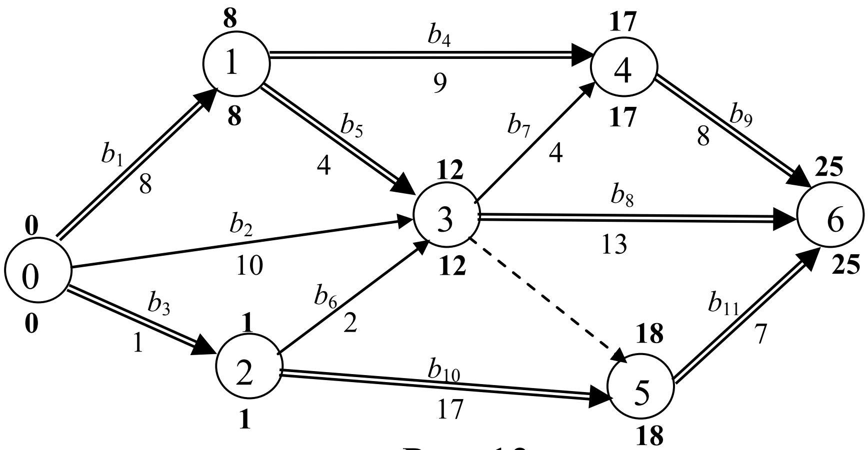


Рис. 13

Продолжим процесс сокращения критических путей с наибольшей экономией вкладываемых дополнительно средств, несмотря на то что стоимость проекта при этом начнет повышаться.

Шаг № 4. Резервы оставшихся некритических дуг таковы:

R (0, 3) = (8 + 4) – 10 = 2; R (2, 3) = $r_п(b_6)$ = 12 – 1 – 2 = 9;

R (3, 4) = $r_п(b_7)$ = 17 – 12 – 4 = 1; R (3, 5) = 18 – 12 = 6.

Резервы сокращения работ b_5 и b_{11} уменьшились на один день. Имеем три параллельных критических пути. Выберем наиболее выгодную комбинацию сокращаемых работ.

$L_{\text{крит}}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)		
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5
R_k^4	0	11	5	5	3	9	5	8	7

На каждом из критических путей выбираем работу с наименьшей стоимостью сокращения. Это работы b_{11} (s_{11} = 7 ден. ед.), b_5 (s_5 = = 3 ден. ед.) и b_9 (s_9 = 5 ден. ед.). Суммарная стоимость сокращения этих работ 7 + 3 + 5 = 15 ден. ед. Работу b_3 как работу с нулевым резервом сокращения более не рассматриваем. Но у нас есть работа b_1, которая принадлежит сразу двум критическим путям. Ее сокращение сократит и II, и III критический путь одновременно. Следовательно, нужно рассмотреть также комбинацию работ b_{11} и b_1. Суммарная стоимость сокращения этих работ составит 7 + 6 = 13 ден. ед. Это более выгодный вариант. Значит, именно эти работы нужно сокращать в первую очередь. Найдем величину допустимого сокращения. Уменьшение продолжительности работы b_1 сместит срок наступления события 1. Вместе с ним на ту же величину сместятся сроки наступления событий 3 и 4, но соотношение между сроками наступления этих событий останется прежним. Изменение продолжительности работы b_{11} влияет лишь на срок наступления события 6 и не затрагивает событий 3 и 4. Это значит, что резерв некритической дуги (3, 4) не зависит от сокращения работ b_1 и b_{11}. А вот дуга (0, 3) с резервом в два дня непосредственно опирается на участок критического пути, содержащий работу b_1. Значит, сократить работы b_1 и b_{11} на данном этапе удастся только на 2 дня: $t^{\text{c}} = \min\{R_{11}^4, R_1^4, R(0,3)\} = \min\{5, 5, 2\} = 2.$

Данные представлены в таблице.

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	t^c	$t^c \cdot \Delta^i$	$T^i_{кр}$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	10 – 13 = – 3	2	– 6	23	300

Итак, на данном шаге получили $T^4_{кр} = 25 - 2 = 23$, $S^4 = 294 - (-6) = 300$.

Время выполнения проекта уменьшилось, но стоимость начала возрастать. Возник еще один параллельный критический путь: (0, 3, 6). Резервы сокращения работ b_1 и b_{11} уменьшились на два дня. Некритическими остались только работы b_6 и b_7 и фиктивная работа (3, 5). Каждая из этих работ соединяет события, лежащие на разных критических путях, значит, каждая из них представляет отдельную некритическую дугу, резерв времени которой совпадает с полным резервом времени соответствующей работы. Отразим все полученные изменения на сетевом графике (рис. 14).

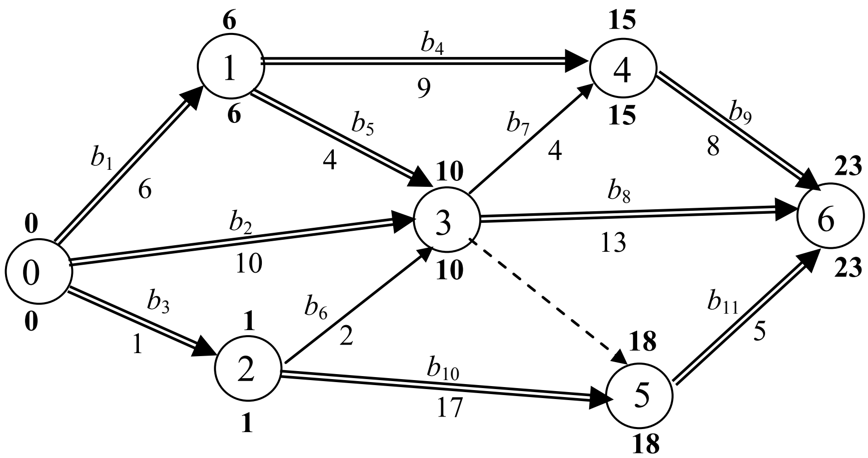


Рис. 14

Шаг № 5. Найдем резервы оставшихся некритических дуг.

R (2, 3) = 10 – 1 – 2 = 7, R (3, 4) = 15 – 10 – 4 = 1, R (3, 5) =18 – 10 = 8.

У нас четыре параллельных критических пути. Данные представлены в таблице.

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV(0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R^5_k	0	11	3	3	3	9	3	8	7	6	9

Сократить II и III критические пути выгоднее за счет их общей работы b_1 ($s_1 = 6$), чем за счет наиболее дешевых работ: b_5 на II пути и b_9 на III пути ($s_5 + s_9 = 3 + 5 = 8$). На I и IV путях возьмем наиболее дешевые работы: b_{11} ($s_{11} = 7$) и b_2 ($s_2 = 8$). Итак, будем сокращать работы b_1, b_2 и b_{11}. При этом сроки событий 1, 3 и 4 сместятся одинаково, а значит дуга (3, 4) снова останется некритической с прежним резервом в один день. В связи с этим для времени сокращения возьмем минимальное значение из резервов сокращения выбранных работ и резерва времени некритической дуги (2, 3):

$$t^{\text{c}} = \min\{R_{11}^5, R_1^5, R_2^5, R(2,3)\} = \min\{3, 3, 6, 7\} = 3.$$

Добавим в итоговую таблицу результаты сделанного шага:

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	t^{c}	$t^{\text{c}} \cdot \Delta^i$	$T_{\text{кр}}^i$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	10 – 13 = – 3	2	– 6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	6 + 8 +7 = 21	10 – 21 = – 11	3	– 33	20	333

Итак, пятый шаг дает нам $T_{\text{кр}}^5 = 23 - 3 = 20$, $S^5 = 300 - (-33) = 333$ (рис. 15).

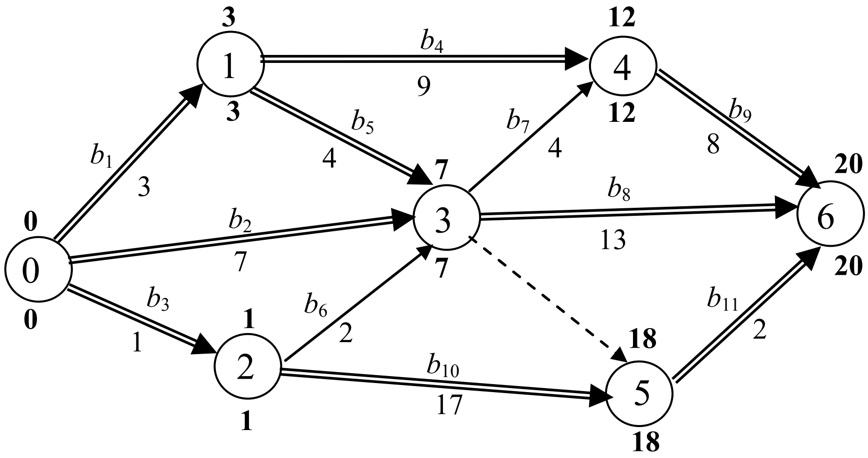


Рис. 15

Шаг № 6. В результате предыдущего шага резервы сокращения работ b_1 и b_{11} снизились до нуля. В дальнейшем уменьшении продолжительности проекта эти работы более не участвуют. Новых критических путей не возникло. Резерв сокращения работы b_2 уменьшился на 3 дня и стал равным 3 дням. Данные представлены в таблице.

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV(0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^6	0	11	0	0	3	9	0	8	7	3	9

Теперь на I-м критическом пути можно сокращать только работу b_{10}. Ее резерв сокращения – 11 дней. Пути II и IV можно сократить за счет работы b_8 (стоимость одного дня такого сокращения – 9 ден. ед.) или за счет одновременного сокращения работ b_5 и b_2 (но их сокращение на один день стоит 3 + 8 = 11 ден. ед., что менее выгодно). Путь III будем сокращать за счет работы b_9 как самой дешевой на этом пути (один день ее сокращения стоит 5 ден. ед.). Найдем новые резервы некритических дуг: $R(2, 3) = 7 - 1 - 2 = 4$, $R(3, 4) = 12 - 7 - 4 = 1$, $R(3, 5) = 18 - 7 = 11$. Изменение продолжительностей работ b_{10}, b_8 и b_9 меняет сроки наступления событий 5 и 6, но не сказывается на сроках наступления событий 2, 3 и 4, поэтому при выборе времени сокращения следует учитывать лишь резерв времени некритической дуги (3, 5) и резервы сокращения рассматриваемых работ:

$$t^{\text{с}} = \min\{R_{10}^6, R_8^6, R_9^6, R(3,5)\} = \min\{11, 9, 7, 11\} = 7.$$

Таким образом, есть возможность сократить продолжительность проекта еще на 7 дней. Осуществим это сокращение, уменьшив время выполнения каждой из работ b_{10}, b_8 и b_9 на 7 дней. Резерв времени некритических работ b_6 и b_7 при этом не изменится. Резерв времени некритической дуги (3, 5) уменьшится.

Добавим полученные результаты в итоговую таблицу:

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	$t^{\text{с}}$	$t^{\text{с}} \cdot \Delta^i$	$T_{\text{кр}}^i$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	10 – 13 = – 3	2	– 6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	6 + 8 +7 = 21	10 – 21 = –11	3	– 33	20	333
6	$b_8 + b_9 + b_{10}$	9 + 5 + 10 = 24	10 – 24 = –14	7	– 98	13	431

Итак, теперь $T_{кр}^{6} = 20 - 7 = 13$ дней, $S^{6} = 333 - (-98) = 431$ ден. ед. Новых критических путей не возникло (рис. 16).

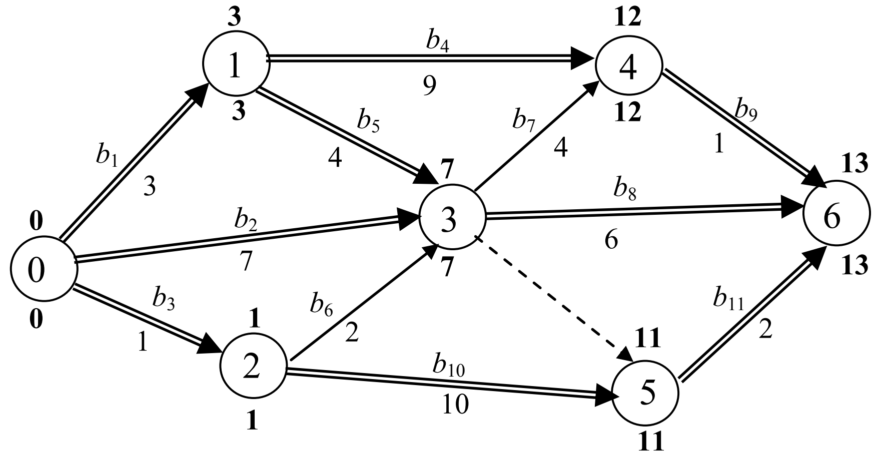


Рис. 16

Резерв сокращения работы b_9 исчерпан полностью, далее эта работа не рассматривается. Резерв работы b_8 сократился до двух дней, а работы b_{10} до четырех дней. Однако еще нет ни одного критического пути, целиком состоящего из более несокращаемых работ, поэтому продолжим процесс сокращения.

Шаг № 7. На этом шаге резервы некритических дуг составляют $R(2, 3) = 7 - 1 - 2 = 4$, $R(3, 4) = 12 - 7 - 4 = 1$, $R(3, 5) = 11 - 7 = 4$ дня. Данные представлены в таблице.

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV(0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^7	0	4	0	0	3	2	0	8	0	3	2

Критический путь I по-прежнему можно сократить только за счет работы b_{10}, критические пути II и IV, как и раньше, выгоднее сократить за счет работы b_8, чем за счет работ b_5 и b_2, а критический путь III теперь можно сократить только за счет работы b_4. Найдем допустимое время сокращения.

Сокращение работы b_4 приведет к уменьшению резерва некритической дуги (3, 4), так как сместится срок наступления события 4, а сокращение работ b_{10} и b_8 – к изменению резерва некритической дуги (3, 5).

Эти дуги могут стать критическими, поэтому необходимо при выборе времени сокращения учесть резервы этих дуг:

$$t^{\text{c}} = \min\{R_4^7, R_8^7, R_{10}^7, R(3,4), R(3,5)\} = \min\{8, 2, 4, 1, 4\} = 1.$$

Минимальный резерв времени оказался у дуги (3, 4), именно он и определяет допустимое время общего сокращения. Кроме того, это означает, что после осуществления такого сокращения дуга (3, 4) станет критической и появятся новые критические пути. Осуществим данный шаг и занесем его результаты в итоговую таблицу:

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	t^{c}	$t^{\text{c}} \cdot \Delta^i$	$T^i_{\text{кр}}$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	10 – 13 = – 3	2	– 6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	6 + 8 +7 = 21	10 – 21 = –11	3	– 33	20	333
6	$b_8 + b_9 + b_{10}$	9 + 5 + 10 = 24	10 – 24 = –14	7	– 98	13	431
7	$b_4 + b_8 + b_{10}$	6 + 9 + 10 = 25	10 – 25 = –15	1	–15	12	446

В результате проделанного шага критическое время сократилось до 12 дней, а стоимость проекта стала равна 446 ден. ед. Общая схема проекта отражена на рис. 17.

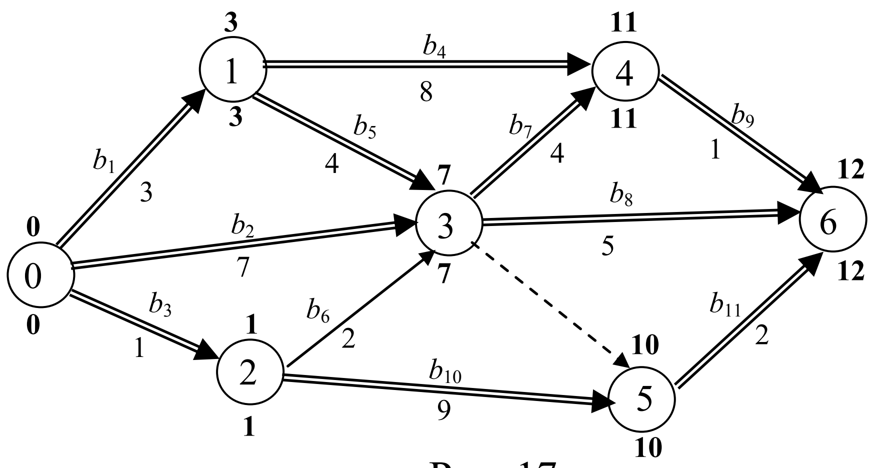


Рис. 17

Работа b_7 стала критической. Появились новые критические пути V(0, 3, 4, 6) и VI(0, 1, 3, 4, 6).

Шаг № 8. Найдем резервы оставшихся некритических дуг.

$R(2, 3) = 7 – 1 – 2 = 4,$
$R(3, 5) = 10 – 7 = 3.$

Пересчитаем резервы сокращения работ на критических путях и рассмотрим таблицу получившихся критических путей:

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV(0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^8	0	3	0	0	3	1	0	7	0	3	1

$L_{крит}$	V(0, 3, 4, 6)			VI (0, 1, 3, 4, 6)			
b_k	b_2	b_7	b_9	b_1	b_5	b_7	b_9
s_k	8	3	5	6	3	3	5
	3	3	0	0	3	3	0

Анализ критических путей показывает, что резерв сокращения работ b_1, b_3, b_9 и b_{11} равен нулю, сократить критический путь I можно только за счет работы b_{10}, а критический путь III – только за счет работы b_4. Сократить критический путь II можно за счет работы b_5 или за счет работы b_8. Если взять вариант с работой b_8, то одновременно сократится и критический путь IV, тогда пути V и VI нужно будет сокращать за счет наименее затратной их общей работы b_7. Стоимость одного дня такого варианта сокращения путей II, IV, V и VI будет равна $s_8 + s_7 = 9 + 3 = 12$ ден. ед. Если же выбрать вариант с работой b_5, то вместе с этой работой сократятся критические пути II и VI, тогда сократить пути IV и V нужно с помощью их общей работы b_2. Один день этого варианта сокращения путей II, IV, V и VI обойдется в $s_5 + s_2 = 3 + 8 = 11$ ден. ед. Таким образом, на данном шаге наиболее эффективно сокращение работ b_{10}, b_4, b_5 и b_2.

При отыскании допустимого времени сокращения нужно учесть имеющиеся на данном шаге резервы времени сокращения выбранных работ (это 3 дня для работ b_{10}, b_5, b_2 и 7 дней для работы b_4) и резерв времени все еще некритической работы b_6 (дуги (2, 3)). Это 4 дня. Резерв некритической дуги (3, 5) принимать во внимание не следует, так как при сокращении работ b_2, b_5 и b_4 смещаются сроки наступления событий 3 и 4, а сокращение работы b_{10} меняет сроки наступления событий 5 и 6, но поскольку все они смещаются на одну и ту же величину, соотношение между сроками наступления событий 3 и 5 остается неизменным, и в силу этого резерв некритической дуги (3, 5) не меняется.

$$t^{\text{c}} = \min\{R_2^8, R_4^8, R_5^8, R_{10}^8, R(2,3)\} = \min\{3, 7, 3, 3, 4\} = 3.$$

№ шага	Работы	Σs_k	Δ^i	t^{c}	$t^{\text{c}} \cdot \Delta^i$	$T^i_{\text{кр}}$	S^i
0	–	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	10 – 4 = 6	5	30	28	300
2	b_{11}	7	10 – 7 = 3	2	6	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	10 – 10 = 0	1	0	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	10 – 13 = – 3	2	– 6	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	6 + 8 +7 = 21	10 – 21 = –11	3	– 33	20	333
6	$b_8 + b_9 + b_{10}$	9 + 5 + 10 = 24	10 – 24 = –14	7	– 98	13	431
7	$b_4 + b_8 + b_{10}$	6 + 9 + 10 = 25	10 – 25 = –15	1	–15	12	446
8	$b_2+b_4+b_5+b_{10}$	8+6+3+10 = 27	10 – 27 = –17	3	– 51	9	497

Осуществим данный шаг. Новые критические пути не возникнут. Резерв дуги (2, 3) уменьшится с четырех до одного дня, так как срок наступления события 2 останется прежним, а событие 3 наступит на три дня раньше.

В итоге будем иметь $T^8_{\text{кр}} = 12 - 3 = 9$ дней, $S^6 = 446 - (-51) = 497$ ден. ед.

Полученные изменения внесем в итоговую таблицу. Сетевой график полученного варианта представлен на рис. 18.

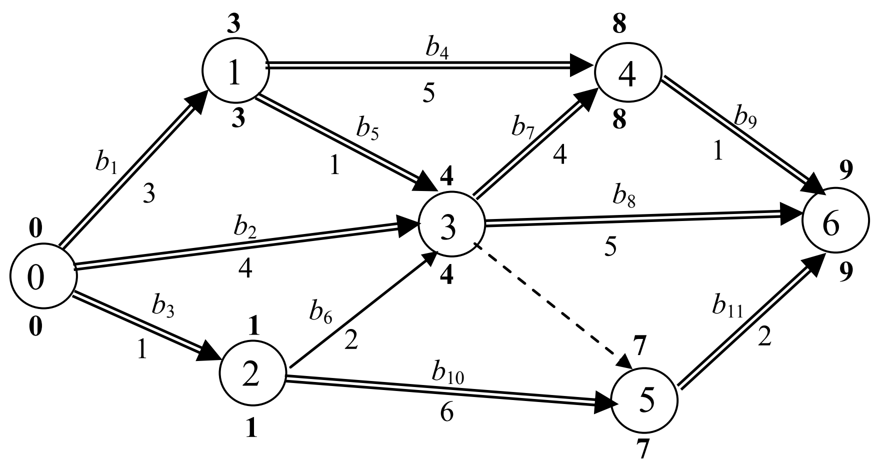


Рис. 18

Рассмотрим новые характеристики критических путей:

$L_{крит}$	I (0, 2, 5, 6)			II (0, 1, 3, 6)			III (0, 1, 4, 6)			IV (0,3,6)	
b_k	b_3	b_{10}	b_{11}	b_1	b_5	b_8	b_1	b_4	b_9	b_2	b_8
s_k	4	10	7	6	3	9	6	6	5	8	9
R_k^9	0	0	0	0	0	1	0	4	0	0	1

$L_{крит}$	V(0, 3, 4, 6)			VI (0, 1, 3, 4, 6)			
b_k	b_2	b_7	b_9	b_1	b_5	b_7	b_9
s_k	8	3	5	6	3	3	5
	0	3	0	0	0	3	0

Заметим, что все работы, составляющие критический путь I (0, 2, 5, 6) имеют теперь нулевой резерв сокращения, т. е. они достигли своей минимальной продолжительности. Это значит, что критическое время не может быть сокращено более. Значит, мы достигли минимального возможного срока выполнения проекта. Он равен девяти дням. Минимальная стоимость проекта с таким сроком исполнения равна 497 ден. ед. Работы b_1, b_2, b_3, b_5, b_9, b_{10}, и b_{11} должны выполняться с максимально возможной интенсивностью (т. е. иметь минимальную продолжительность), в ускорение работ b_6 и b_7 дополнительных средств вкладывать не надо, их можно выполнять с минимально допустимой интенсивностью (т. е. с максимально допустимой продолжительностью), работу b_4 следует сократить с 9 до 5 дней, а работу b_8 – с 13 до 5 дней. Возможная интенсификация этих работ (сокращение работы b_4 до одного дня, а работы b_8 до четырех дней) не целесообразна: она не изменит критического времени (9 дней), но лишь увеличит стоимость выполнения проекта.

Итак, процесс пошагового поиска варианта проекта, минимального по стоимости с минимально возможным временем выполнения, завершен. Полученный результат полностью соответствует тому, что был найден методом «обратного хода».

Построим график зависимости оптимальной общей стоимости проекта от времени его выполнения (по проведенным шагам). Данные для построения возьмем из итоговой таблицы проведенных шагов. Результат представлен на рис. 19.

№ шага	Работы	Σs_k	t^{c}	$S^i_{\text{доп}} = t^c \cdot \Sigma s_k$	$T^i_{\text{кр}}$	S^i
0	–	–	–	–	33	330
1	b_3	4	5	5 4 = 20	28	300
2	b_{11}	7	2	2 7 = 14	26	294
3	$b_5 + b_{11}$	3 + 7 = 10	1	1 10 = 10	25	294
4	$b_1 + b_{11}$	6 + 7 = 13	2	2 13 = 26	23	300
5	$b_1 + b_2 + b_{11}$	6 + 8 +7 = 21	3	3 21 = 63	20	333
6	$b_8 + b_9 + b_{10}$	9 + 5 + 10 = 24	7	7 24 = 168	13	431
7	$b_4 + b_8 + b_{10}$	6 + 9 + 10 = 25	1	1 25 = 25	12	446
8	$b_2+b_4+b_5+b_{10}$	8+6+3+10 = 27	3	3 27 = 81	9	497

Здесь $S^i_{\text{доп}} = t^{\text{c}}\ \Sigma s_k$ – дополнительно вкладываемые в сокращение работ средства на i-ом шаге. Общая стоимость дополнительно вложенных средств (суммируем данные столбца $S^i_{\text{доп}}$) равна 407 ден. ед.

Рис. 19

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью $P = 0{,}9973$) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью. Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	5	3	6
b_2	–	7	6	4	8
b_3	b_1	5	4	2	4
b_4	b_2	2	2	1	6
b_5	b_1	6	4	2	7
b_6	b_3, b_4	6	3	1	4
b_7	b_2	9	6	3	5
b_8	b_3, b_4, b_5	3	2	1	9
b_9	b_6, b_8	4	2	1	5
b_{10}	b_3, b_4, b_5	11	8	3	10
b_{11}	b_6, b_8	9	5	2	7
b_{12}	b_7, b_9	8	6	4	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир} = 22$ дня.
Заданная надежность $\gamma = 0{,}90$.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: $S = 12$.

ВАРИАНТ 2

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью $P = 0{,}9973$) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{\max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	5	3	5
b_2	–	10	8	4	8
b_3	b_1	9	7	2	4
b_4	b_1	10	7	2	6
b_5	b_2	8	4	2	7
b_6	b_3	9	6	1	4
b_7	b_4, b_5	5	2	1	5
b_8	b_2	6	4	1	9
b_9	b_6, b_7	7	4	2	5
b_{10}	b_4, b_5	12	9	5	9
b_{11}	b_4, b_5, b_8	9	6	2	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир} = 20$ дней.
Заданная надежность $\gamma = 0{,}95$.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: $S = 10$.

ВАРИАНТ 3

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	8	6	3	4
b_2	–	6	4	2	8
b_3	b_1	13	10	6	5
b_4	b_1	4	2	1	6
b_5	b_4	5	4	2	7
b_6	b_2	10	9	4	4
b_7	b_2	6	3	1	10
b_8	b_7	9	4	2	9
b_9	b_5, b_6, b_8	10	6	3	5
b_{10}	b_3, b_4, b_9	7	5	3	8
b_{11}	b_5, b_6, b_8	11	9	5	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 26 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 4

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	4	3	7
b_2	–	7	5	4	8
b_3	b_1	9	8	2	4
b_4	b_2	7	6	1	6
b_5	b_3, b_4	6	5	2	8
b_6	b_4	6	4	1	4
b_7	b_5, b_6	12	6	4	5
b_8	b_5, b_6	5	3	1	9
b_9	b_7	6	3	2	5
b_{10}	b_5, b_6	11	8	6	10
b_{11}	b_8	9	4	2	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 5

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	4	3	3
b_2	–	7	5	4	7
b_3	–	13	6	2	5
b_4	b_1	8	6	3	8
b_5	b_2	6	5	2	10
b_6	b_2	10	8	3	2
b_7	b_3	9	4	3	6
b_8	b_4, b_5	13	7	5	4
b_9	b_6, b_7	9	6	2	8
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	5	3	3
b_{11}	b_9	9	5	2	5

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 25 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 6

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	14	6	3	7
b_2	–	7	5	4	4
b_3	b_1	9	5	2	5
b_4	b_1	10	8	3	9
b_5	b_2	9	6	2	3
b_6	b_3, b_4, b_5	12	9	5	2
b_7	b_3, b_4, b_5	10	4	3	5
b_8	b_4, b_5	9	5	1	7
b_9	b_6	8	6	2	6
b_{10}	b_7, b_8	11	6	4	5
b_{11}	b_4, b_5	9	8	3	4

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 27 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 7

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	3
b_2	–	7	5	4	2
b_3	–	12	9	2	5
b_4	b_1	10	7	4	8
b_5	b_2	12	6	3	5
b_6	b_3	6	3	1	2
b_7	b_3	9	6	3	4
b_8	b_4, b_5, b_6	8	4	1	1
b_9	b_4, b_5, b_6	4	3	1	6
b_{10}	b_7, b_8, b_9	9	4	2	5
b_{11}	$b_7, b_8,$	9	5	3	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 24 дня.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 9 денежным единицам: S = 9.

ВАРИАНТ 8

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	5	2	3	4
b_2	–	14	8	4	6
b_3	–	9	5	2	8
b_4	b_1	8	5	1	3
b_5	b_2	6	4	2	6
b_6	b_3	6	3	1	5
b_7	b_2, b_4	7	3	2	9
b_8	b_2, b_4	8	6	2	1
b_9	b_5, b_6, b_7	9	6	3	5
b_{10}	b_5, b_6, b_7	11	9	6	7
b_{11}	b_8, b_9	9	5	2	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 25 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 9

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	14	6	3	8
b_2	–	7	5	4	6
b_3	b_1	8	6	2	9
b_4	b_1	6	4	1	3
b_5	b_2	6	3	2	8
b_6	b_2	14	10	6	5
b_7	b_4, b_5	11	5	3	6
b_8	b_3, b_7	9	5	1	2
b_9	b_3, b_7	17	13	9	7
b_{10}	b_4, b_5, b_6, b_8	10	4	2	9
b_{11}	b_{10}	9	7	2	1

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 30 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 10

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{\text{пес}}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	7	3	5
b_2	–	13	9	4	8
b_3	–	6	4	2	6
b_4	b_3	10	8	3	3
b_5	b_3	16	10	6	9
b_6	b_1, b_2, b_4	6	4	1	2
b_7	b_2, b_4	15	6	3	1
b_8	b_1, b_2, b_4	14	10	4	5
b_9	b_3	12	9	5	7
b_{10}	b_5, b_6, b_7	11	7	6	4
b_{11}	b_9	9	8	4	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}}$ = 27 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 11 денежным единицам: S = 11.

ВАРИАНТ 11

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	7	3	5
b_2	b_1	9	6	4	3
b_3	b_1	8	5	2	8
b_4	b_1	12	7	1	6
b_5	b_2	6	3	2	2
b_6	b_3	9	6	1	6
b_7	b_4	10	4	3	9
b_8	b_5, b_6	13	8	3	1
b_9	b_5, b_6, b_7	7	5	1	4
b_{10}	b_8, b_9	9	4	2	3
b_{11}	b_5, b_6, b_7	10	9	4	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 12

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	6	3	8
b_2	–	10	8	4	6
b_3	b_1	11	7	2	9
b_4	b_2	5	3	1	3
b_5	b_2	8	7	2	5
b_6	b_3, b_4	9	6	1	4
b_7	b_3, b_4	8	5	3	6
b_8	b_5, b_7	10	6	4	9
b_9	b_5, b_7	7	5	1	10
b_{10}	b_6	9	3	2	4
b_{11}	b_8, b_{10}	9	4	2	6
b_{12}	b_{10}	8	3	1	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 11 денежным единицам: S = 11.

ВАРИАНТ 13

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	7
b_2	–	17	9	4	5
b_3	–	8	4	2	8
b_4	b_1	7	5	1	3
b_5	b_3	6	4	2	9
b_6	b_2, b_4, b_5	9	7	1	2
b_7	b_2, b_5	12	6	3	10
b_8	b_3	14	10	6	4
b_9	b_2, b_4, b_5	10	6	3	7
b_{10}	b_6, b_7, b_8	11	9	6	9
b_{11}	b_9	9	5	2	5

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 26 дней.
Заданная надежность γ = 0,99.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 14

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{\text{пес}}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	15	9	3	9
b_2	–	7	5	4	6
b_3	b_2	5	3	2	3
b_4	b_1	6	4	1	5
b_5	b_1	8	6	2	7
b_6	b_3	6	4	2	2
b_7	b_4	10	5	3	4
b_8	b_5, b_6	8	5	1	5
b_9	b_3	9	7	4	8
b_{10}	b_5, b_6, b_7	11	7	6	9
b_{11}	b_8, b_9	10	8	3	2

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}}$ = 29 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 15

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	13	6	3	9
b_2	–	10	7	4	4
b_3	b_1	5	4	2	6
b_4	b_2	7	5	1	3
b_5	b_2	9	6	2	7
b_6	b_1	14	10	5	2
b_7	b_3, b_4	12	8	3	1
b_8	b_5	10	8	4	8
b_9	b_5, b_6, b_7	6	5	2	5
b_{10}	b_5, b_6, b_7	11	7	5	4
b_{11}	b_8, b_9	9	6	2	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 30 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 16

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	15	11	3	9
b_2	–	10	8	4	5
b_3	–	14	10	2	7
b_4	b_1	11	9	4	3
b_5	b_2	16	13	6	6
b_6	b_2	9	7	2	5
b_7	b_3, b_6	8	5	3	10
b_8	b_7	9	6	1	9
b_9	b_7	12	8	4	7
b_{10}	b_4, b_5, b_8	11	6	3	6
b_{11}	b_9, b_{10}	13	10	7	11
b_{12}	b_4, b_5	16	14	8	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 40 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 14 денежным единицам: S = 14.

ВАРИАНТ 17

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	6
b_2	–	7	4	2	7
b_3	b_1	8	5	2	5
b_4	b_2	6	3	1	8
b_5	b_3, b_4	7	4	2	4
b_6	b_3, b_4	10	8	3	9
b_7	b_2	15	10	5	3
b_8	b_5	9	6	3	10
b_9	b_5, b_6, b_7	7	4	2	2
b_{10}	b_5, b_6, b_7	11	9	5	5
b_{11}	b_8, b_9	9	7	2	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,99.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 18

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	5	3	6
b_2	–	7	6	4	8
b_3	–	5	4	2	4
b_4	b_1	2	2	1	6
b_5	b_2	6	4	2	7
b_6	b_2	6	3	1	4
b_7	b_3	15	8	3	5
b_8	b_4, b_5	3	2	1	9
b_9	b_6, b_7	4	2	1	5
b_{10}	b_8	10	6	3	10
b_{11}	b_4, b_5, b_9	9	5	2	7
b_{12}	b_{10}, b_{11}	8	6	4	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 26 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 19

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	5	3	5
b_2	–	10	8	4	8
b_3	b_1	9	7	2	4
b_4	b_1	10	7	2	6
b_5	b_2	8	4	2	7
b_6	b_3	9	6	1	4
b_7	b_3	5	2	1	5
b_8	b_4, b_5, b_6	6	4	1	9
b_9	b_2	7	4	2	5
b_{10}	b_4, b_5, b_6, b_7	12	9	5	9
b_{11}	b_8, b_9, b_{10}	9	6	2	7
b_{12}	b_4, b_5, b_6, b_7	11	5	2	4

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 35 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 20

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	8	6	3	4
b_2	–	6	4	2	8
b_3	b_1	13	10	6	5
b_4	b_2	4	2	1	6
b_5	b_2	5	4	2	7
b_6	b_3, b_4	10	9	4	4
b_7	b_5	6	3	1	10
b_8	b_5, b_6	9	4	2	9
b_9	b_5, b_6	10	6	3	5
b_{10}	b_7, b_8	7	5	3	8
b_{11}	b_9, b_{10}	11	9	5	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 45 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 21

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	4	3	7
b_2	–	7	5	4	8
b_3	b_2	9	8	2	4
b_4	b_2	7	6	1	6
b_5	b_1	6	5	2	8
b_6	b_3	6	4	1	4
b_7	b_3	12	6	4	5
b_8	b_4	5	3	1	9
b_9	b_5, b_6	6	3	2	5
b_{10}	b_7, b_8	11	8	6	10
b_{11}	b_7, b_8, b_9	9	4	2	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 22

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	4	3	3
b_2	–	7	5	4	7
b_3	–	13	6	2	5
b_4	b_1	8	6	3	8
b_5	b_1	6	5	2	10
b_6	b_2	10	8	3	2
b_7	b_2	9	4	3	6
b_8	b_3	10	5	2	4
b_9	b_5, b_6, b_7, b_8	9	6	2	8
b_{10}	b_5, b_6	11	5	3	3
b_{11}	b_4	9	5	2	5

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 20 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 23

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	14	6	3	7
b_2	–	7	5	4	4
b_3	b_1	9	5	2	5
b_4	b_2	10	8	3	9
b_5	b_2	9	6	2	3
b_6	b_4	12	9	5	2
b_7	b_5	10	4	3	5
b_8	b_3, b_4	9	5	1	7
b_9	b_6, b_7	8	6	2	6
b_{10}	b_5	11	6	4	5
b_{11}	b_8	9	8	3	4

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 27 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 24

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	3
b_2	–	7	5	4	2
b_3	–	12	9	2	5
b_4	b_1	10	7	4	8
b_5	b_2	12	6	3	5
b_6	b_3	6	3	1	2
b_7	b_4	9	6	3	4
b_8	b_5, b_6	8	4	1	1
b_9	b_5, b_6	4	3	1	6
b_{10}	b_5, b_6	9	4	2	5
b_{11}	b_7, b_8	9	5	3	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 26 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 9 денежным единицам: S = 9.

ВАРИАНТ 25

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	5	2	3	4
b_2	–	14	8	4	6
b_3	–	9	5	2	8
b_4	b_1	8	5	1	3
b_5	b_1	6	4	2	6
b_6	b_3	6	3	1	5
b_7	b_2, b_5	7	3	2	9
b_8	b_2, b_4, b_5	8	6	2	1
b_9	b_6, b_7	9	6	3	5
b_{10}	b_6, b_7	11	9	6	7
b_{11}	b_8, b_9	9	5	2	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 24 дня.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 26

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{\text{пес}}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	14	6	3	8
b_2	–	7	5	4	6
b_3	b_1	8	6	2	9
b_4	b_2	6	4	1	3
b_5	b_2	6	3	2	8
b_6	b_3, b_4	10	6	4	5
b_7	b_3, b_4	11	5	3	6
b_8	b_5, b_6	9	5	1	2
b_9	b_5, b_6	17	12	8	7
b_{10}	b_7, b_8, b_9	10	4	2	9
b_{11}	b_7, b_8	9	7	2	1

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}}$ = 35 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 27

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	7	3	5
b_2	–	13	9	4	8
b_3	–	6	4	2	6
b_4	b_1	10	8	3	3
b_5	b_3	9	6	2	9
b_6	b_2, b_4, b_5	6	4	1	2
b_7	b_2, b_4, b_5	15	6	3	1
b_8	b_2, b_4, b_5	14	10	4	5
b_9	b_6	12	9	5	7
b_{10}	b_7	11	7	6	4
b_{11}	b_3, b_8	9	8	4	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 35 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 11 денежным единицам: S = 11.

ВАРИАНТ 28

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	7	3	5
b_2	b_1	9	6	4	3
b_3	b_1	8	5	2	8
b_4	b_2	12	7	1	6
b_5	b_3	6	3	2	2
b_6	b_3	9	6	1	6
b_7	b_4, b_5	10	4	3	9
b_8	b_4, b_5, b_6	13	8	3	1
b_9	b_7	7	5	1	4
b_{10}	b_7	9	4	2	3
b_{11}	b_9	7	5	3	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 36 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 29

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	6	3	8
b_2	–	10	8	4	6
b_3	b_1	11	7	2	9
b_4	b_2	5	3	1	3
b_5	b_2	8	7	2	5
b_6	b_2	9	6	1	4
b_7	b_3, b_4	8	5	3	6
b_8	b_3, b_4, b_5	10	6	4	9
b_9	b_6	7	5	1	10
b_{10}	b_3, b_4, b_5	9	3	2	4
b_{11}	b_7, b_8	9	4	2	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 11 денежным единицам: S = 11.

ВАРИАНТ 30

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	7
b_2	–	17	9	4	5
b_3	–	8	4	2	8
b_4	b_1	7	5	1	3
b_5	b_2	6	4	2	9
b_6	b_3	9	7	1	2
b_7	b_4, b_5	12	6	3	10
b_8	b_4, b_5, b_6	14	10	6	4
b_9	b_4, b_5, b_6	10	6	3	7
b_{10}	b_7, b_8	11	9	6	9
b_{11}	b_9	9	5	2	5

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 33 дня.
Заданная надежность γ = 0,99.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 31

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	15	9	3	9
b_2	–	7	5	4	6
b_3	b_1	5	3	2	3
b_4	b_2	6	4	1	5
b_5	b_2	8	6	2	7
b_6	b_3, b_4	6	4	2	2
b_7	b_3, b_4	10	5	3	4
b_8	b_5, b_6	8	5	1	5
b_9	b_5, b_6	9	7	4	8
b_{10}	b_5, b_6	11	8	6	9
b_{11}	b_2	10	12	3	2
b_{12}	b_7, b_8, b_9	9	5	2	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 29 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 32

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	13	6	3	9
b_2	–	10	7	4	4
b_3	b_1	5	4	2	6
b_4	b_1	7	5	1	3
b_5	b_2	9	6	2	7
b_6	b_2	14	10	5	2
b_7	b_4, b_5	12	8	3	1
b_8	b_3, b_4, b_5	10	8	4	8
b_9	b_6, b_7	6	5	2	5
b_{10}	b_6, b_7	11	7	5	4
b_{11}	b_8, b_9	9	6	2	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 30 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 33

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	15	11	3	9
b_2	–	10	8	4	5
b_3	–	14	10	2	7
b_4	b_3	11	9	4	3
b_5	b_1	16	13	6	6
b_6	b_1, b_2, b_4	9	7	2	5
b_7	b_1, b_2, b_4	8	5	3	10
b_8	b_5, b_6	9	6	1	9
b_9	b_5, b_6	12	8	4	7
b_{10}	b_7, b_9	11	6	3	6
b_{11}	b_7, b_9	13	10	7	11
b_{12}	b_8, b_{11}	16	10	5	8

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 56 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 14 денежным единицам: S = 14.

ВАРИАНТ 34

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	5	3	6
b_2	–	7	4	2	7
b_3	b_1	8	5	2	5
b_4	b_2	6	3	1	8
b_5	b_3	7	4	2	4
b_6	b_1, b_4	10	8	3	9
b_7	b_1, b_4	12	8	5	3
b_8	b_5, b_6	9	6	3	10
b_9	b_7	7	4	2	2
b_{10}	b_7	10	7	4	5
b_{11}	b_8, b_9	9	7	2	3

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 29 дней.
Заданная надежность γ = 0,99.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 35

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	9	5	3	5
b_2	–	8	6	4	8
b_3	b_1	9	6	2	4
b_4	b_1	10	7	2	6
b_5	b_2	8	4	2	7
b_6	b_2	9	6	1	4
b_7	b_3	5	2	1	5
b_8	b_4, b_5	6	4	1	9
b_9	b_6	7	4	2	5
b_{10}	b_6, b_7, b_8	12	9	5	9
b_{11}	b_6, b_7, b_8	9	6	2	7
b_{12}	b_9, b_{10}	10	8	5	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 35 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 36

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	8	6	3	4
b_2	–	6	4	2	8
b_3	b_1	13	10	6	5
b_4	b_1	4	2	1	6
b_5	b_1, b_2	5	4	2	7
b_6	b_4, b_5	10	9	4	4
b_7	b_3, b_6	6	3	1	10
b_8	b_4, b_5	9	4	2	9
b_9	b_7	10	6	3	5
b_{10}	b_4, b_5	14	8	3	8
b_{11}	b_8, b_9	11	9	5	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 36 дней.
Заданная надежность γ = 0,95.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВАРИАНТ 37

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	7	3	7
b_2	–	7	5	4	8
b_3	b_1	9	8	2	4
b_4	b_2	7	6	1	6
b_5	b_3, b_4	6	5	2	8
b_6	b_4	6	4	1	4
b_7	b_5, b_6	12	6	4	5
b_8	b_5, b_6	5	3	1	9
b_9	b_7	10	6	3	5
b_{10}	b_5, b_6	11	8	6	10
b_{11}	b_8	9	4	2	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 28 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 38

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{\text{пес}}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{\text{пес}}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{\text{пес}} = t_{\max}$), а $t_{\text{опт}}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{\text{опт}} = t_{\min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{\text{пес}}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{опт}}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	6	3	9
b_2	–	7	3	1	8
b_3	b_1	9	5	2	6
b_4	b_1, b_2	12	8	3	9
b_5	b_1, b_2	10	7	2	11
b_6	b_3, b_4	6	4	1	4
b_7	b_3, b_4	12	8	4	5
b_8	b_5, b_6	9	5	1	9
b_9	b_8	10	4	3	7
b_{10}	b_7, b_9	11	6	3	10
b_{11}	b_8	9	6	2	6

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{\text{дир}}$ = 35 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 14 денежным единицам: S = 14.

ВАРИАНТ 39

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	5	3	9
b_2	–	17	10	4	6
b_3	–	19	10	6	4
b_4	b_1	14	8	3	5
b_5	b_2	10	6	2	8
b_6	b_2	12	8	4	7
b_7	b_3, b_5	12	8	5	5
b_8	b_3, b_5	20	14	10	9
b_9	b_2, b_4	9	5	3	8
b_{10}	b_2, b_4	8	6	4	10
b_{11}	b_6, b_7, b_9	9	4	2	6
b_{12}	b_{10}, b_{11}	10	6	3	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 36 дней.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 12 денежным единицам: S = 12.

ВАРИАНТ 40

1. Построить сетевой график для максимальной ($t_{пес}$) продолжительности всех его работ, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг.

2. Для трехпараметрической модели найти ожидаемое время выполнения проекта, определить вероятность выполнения проекта не позднее заданного срока, найти интервал гарантированного (с вероятностью P = 0,9973) времени выполнения проекта, оценить максимально возможный срок выполнения проекта с заданной надежностью.

Выполнить те же расчеты для двухпараметрической модели. Сравнить результаты.

3. Считая $t_{пес}$ продолжительностью работы с минимальной допустимой интенсивностью ($t_{пес} = t_{max}$), а $t_{опт}$ – продолжительностью работы с максимальной возможной интенсивностью ($t_{опт} = t_{min}$), найти оптимальный по стоимости вариант выполнения проекта.

Минимизировать стоимость проекта при минимально возможном сроке его исполнения.

Работа	Опирается на работы	$t_{пес}$	$t_{вер}$	$t_{опт}$	Стоимость сокращения работы на один день, s_k
b_1	–	10	4	3	7
b_2	b_1	7	6	4	8
b_3	b_1	9	8	2	4
b_4	b_2	7	4	1	6
b_5	b_3	9	8	2	8
b_6	b_3	10	6	1	4
b_7	b_3, b_4	12	6	4	5
b_8	b_5	9	5	1	9
b_9	b_6	10	5	3	5
b_{10}	b_7, b_8, b_9	11	5	6	9
b_{11}	b_6	9	6	2	7

Директивный (заданный) срок выполнения проекта $T_{дир}$ = 32 дня.
Заданная надежность γ = 0,90.
Стоимость одного дня проекта равна 10 денежным единицам: S = 10.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Графы, их виды. Вершины, ребра, дуги, петли. Мультиграфы и псевдографы. Изоморфизм графов. Плоские и планарные графы.
2. Способы задания графов. Степени вершин графа. Лемма «о рукопожатиях».
3. Маршруты, пути, цепи, контуры, циклы в графах.
4. Связность графов. Компоненты связности графа.
5. Эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы в графах. Уникурсальные графы. Условия уникурсальности.
6. Деревья и их свойства. Цикломатическое число графа.
7. Метрические характеристики графа. Расстояние между вершинами графа. Эксцентриситет вершины. Радиус и диаметр графа. Периферийные и центральные вершины графа. Центр графа. Диаметральная цепь графа. Обхват графа.
8. Анализ достижимости вершин графа. Отыскание числа путей с заданным числом ребер (дуг), ведущих в вершины графа. Матрица транзитивного замыкания графа. Матрица достижимости вершин графа.
9. Алгоритм Фаулкса отыскания гамильтоновой цепи в графе.
10. Взвешенные графы. Остов графа. Задача о минимальном соединении. Алгоритм Борувки – Краскала отыскания минимального остовного дерева.
11. Отыскание кратчайших путей во взвешенных графах. Алгоритм Дейкстры. Дерево кратчайших путей из данной вершины графа.
12. Задача коммивояжера. Алгоритм с возвратами отыскания гамильтоновых циклов в графе. Построение сопутствующего дерева.
13. Задачи упорядочения. Минимизация штрафных санкций за задержку обслуживания. Диаграммы Ганта.
14. Задача одного станка (задача «директора»). Алгоритм ее решения.
15. Задача двух станков. Алгоритм Джонсона.
16. Суть метода сетевого планирования и управления проектами.

17. Основные понятия сетевого метода: работа, событие, сетевой график.
18. Определение ранга работ. Упорядочение списка работ.
19. Диаграммы Ганта последовательности работ.
20. Виды сетевых графиков: логические («работы – связи») и структурные («события – работы»). Их преимущества и недостатки.
21. Основные требования к построению структурных сетевых графиков.
22. Причины введения фиктивных работ.
23. Этапы построения структурного сетевого графика для большого числа работ.
24. Способы проверки правильности построения сетевого графика.
25. Определение рангов событий. Правильная нумерация событий.
26. Способы описания сетевых графиков.
27. Определение количества путей, связанных с некоторым событием.
28. Алгоритм постепенного построения сетевого графика.
29. Правила сокращения числа фиктивных работ.
30. Семейство моделей сетевого графика.
31. Расчет временных характеристик событий: ранние и поздние сроки наступления, резерв времени.
32. Критический путь и его отыскание. Особенности критического пути.
33. Резервы времени работ, их смысл и способы отыскания.
34. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
35. Некритические дуги, резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг.
36. Вероятностные модели на сетевых графиках. Расчет характеристик сетевого графика для трехпараметрических и двухпараметрических моделей.
37. Отыскание вероятности завершения проекта не позднее заданного срока, гарантированного времени выполнения проекта, определение максимального срока окончания проекта с заданной надежностью.
38. Суть метода Монте-Карло.

39. Метод разыгрывания дискретных случайных величин.
40. Методы разыгрывания непрерывных случайных величин.
41. Разыгрывание нормальной случайной величины с помощью равномерно распределенной на (0, 1) случайной величины.
42. Оценка точности величин, полученных методом Монте-Карло.
43. Применение метода Монте-Карло к сетевым графикам.
44. Оптимизация стоимости проекта путем сокращения продолжительности работ на критических путях (методом «стоимость – время»).
45. Отыскание варианта выполнения работ, обеспечивающего минимальную стоимость проекта при условии минимально возможного времени его завершения.
46. Сведение задач оптимизации на сетевых графиках к задачам линейного программирования. Три типа таких задач.
47. Оптимизация сетевых моделей по критерию «минимум исполнителей» (оптимизация распределения ресурсов).
48. Транспортные сети и их особенности. Пропускная способность дуги. Условие сохранения потока. Поток в сети. Величина потока. Разрез сети.
49. Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке.
50. Алгоритм Форда – Фалкерсона отыскания максимального потока в транспортной сети.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Оре О. Графы и их применение / О. Оре. М. : КомКнига, 2006.
2. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ, 2003.
3. Гмурман В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Гмурман. М. : ВШ, 2003.
4. Редькин Н. П. Дискретная математика / Н. П. Редькин. СПб : Лань, 2003.
5. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учебное пособие / Г. И. Москинова. М. : Логос, 2000.
6. Березина Л. Ю. Графы и их применение / Л. Ю. Березина. М. : Просвещение, 1979.
7. Соболь И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Соболь. М. : Наука, 1978.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,35	0,1368	0,70	0,2580	1,05	0,3531
0,01	0,0040	0,36	0,1406	0,71	0,2611	1,06	0,3554
0,02	0,0080	0,37	0,1443	0,72	0,2642	1,07	0,3577
0,03	0,0120	0,38	0,1480	0,73	0,2673	1,08	0,3599
0,04	0,0160	0,39	0,1517	0,74	0,2703	1,09	0,3621
0,05	0,0199	0,40	0,1554	0,75	0,2734	1,10	0,3643
0,06	0,0239	0,41	0,1591	0,76	0,2764	1,11	0,3665
0,07	0,0279	0,42	0,1628	0,77	0,2794	1,12	0,3686
0,08	0,0319	0,43	0,1664	0,78	0,2823	1,13	0,3708
0,09	0,0359	0,44	0,1700	0,79	0,2852	1,14	0,3729
0,10	0,0398	0,45	0,1736	0,80	0,2881	1,15	0,3749
0,11	0,0438	0,46	0,1772	0,81	0,2910	1,16	0,3770
0,12	0,0478	0,47	0,1808	0,82	0,2939	1,17	0,3790
0,13	0,0517	0,48	0,1844	0,83	0,2967	1,18	0,3810
0,14	0,0557	0,49	0,1879	0,84	0,2995	1,19	0,3830
0,15	0,0596	0,50	0,1915	0,85	0,3023	1,20	0,3849
0,16	0,0636	0,51	0,1950	0,86	0,3051	1,21	0,3869
0,17	0,0675	0,52	0,1985	0,87	0,3078	1,22	0,3883
0,18	0,0714	0,53	0,2019	0,88	0,3106	1,23	0,3907
0,19	0,0753	0,54	0,2054	0,89	0,3133	1,24	0,3925
0,20	0,0793	0,55	0,2088	0,90	0,3159	1,25	0,3944
0,21	0,0832	0,56	0,2123	0,91	0,3186	1,26	0,3962
0,22	0,0871	0,57	0,2157	0,92	0,3212	1,27	0,3980
0,23	0,0910	0,58	0,2190	0,93	0,3238	1,28	0,3997
0,24	0,0948	0,59	0,2224	0,94	0,3264	1,29	0,4015
0,25	0,0987	0,60	0,2257	0,95	0,3289	1,30	0,4032
0,26	0,1026	0,61	0,2291	0,96	0,3315	1,31	0,4049
0,27	0,1064	0,62	0,2324	0,97	0,3340	1,32	0,4066
0,28	0,1103	0,63	0,2357	0,98	0,3365	1,33	0,4082
0,29	0,1141	0,64	0,2389	0,99	0,3389	1,34	0,4099
0,30	0,1179	0,65	0,2422	1,00	0,3413	1,35	0,4115
0,31	0,1217	0,66	0,2454	1,01	0,3438	1,36	0,4131
0,32	0,1255	0,67	0,2486	1,02	0,3461	1,37	0,4147
0,33	0,1293	0,68	0,2517	1,03	0,3485	1,38	0,4162
0,34	0,1331	0,69	0,2549	1,04	0,3508	1,39	0,4177

Окончание таблицы П.1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,40	0,4192	1,70	0,4554	2,00	0,4772	2,60	0,4953
1,41	0,4207	1,71	0,4564	2,02	0,4783	2,62	0,4956
1,42	0,4222	1,72	0,4573	2,04	0,4793	2,64	0,4959
1,43	0,4236	1,73	0,4582	2,06	0,4803	2,66	0,4961
1,44	0,4251	1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,68	0,4963
1,45	0,4265	1,75	0,4599	2,10	0,4821	2,70	0,4965
1,46	0,4279	1,76	0,4608	2,12	0,4830	2,72	0,4967
1,47	0,4292	1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,74	0,4969
1,48	0,4306	1,78	0,4625	2,16	0,4846	2,76	0,4971
1,49	0,4319	1,79	0,4633	2,18	0,4854	2,78	0,4973
1,50	0,4332	1,80	0,4641	2,20	0,4861	2,80	0,4974
1,51	0,4345	1,81	0,4649	2,22	0,4868	2,82	0,4976
1,52	0,4357	1,82	0,4656	2,24	0,4875	2,84	0,4977
1,53	0,4370	1,83	0,4664	2,26	0,4881	2,86	0,4979
1,54	0,4382	1,84	0,4671	2,28	0,4887	2,88	0,4980
1,55	0,4394	1,85	0,4678	2,30	0,4893	2,90	0,4981
1,56	0,4406	1,86	0,4686	2,32	0,4898	2,92	0,4982
1,57	0,4418	1,87	0,4693	2,34	0,4904	2,94	0,4984
1,58	0,4429	1,88	0,4699	2,36	0,4909	2,96	0,4985
1,59	0,4441	1,89	0,4706	2,38	0,4913	2,98	0,4986
1,60	0,4452	1,90	0,4713	2,40	0,4918	3,00	0,49865
1,61	0,4463	1,91	0,4719	2,42	0,4922	3,20	0,49931
1,62	0,4474	1,92	0,4726	2,44	0,4927	3,40	0,49966
1,63	0,4484	1,93	0,4732	2,46	0,4931	3,60	0,499841
1,64	0,4495	1,94	0,4738	2,48	0,4934	3,80	0,499928
1,65	0,4505	1,95	0,4744	2,50	0,4938	4,00	0,499968
1,66	0,4515	1,96	0,4750	2,52	0,4941	4,50	0,499997
1,67	0,4525	1,97	0,4756	2,54	0,4945	5,00	0,499997
1,68	0,4535	1,98	0,4761	2,56	0,4948		
1,69	0,4545	1,99	0,4767	2,58	0,4951		

ОГЛАВЛЕНИЕ